

د. شهرة ثورية

أستاذ محاضر جامعة قاصدي مرباح ورقلة

محاضرات في الفيزياء 1

ميكانيك النقطة المادية

محاضرات موجهة لطلبة النظام ل .م. د علوم وتقتيات

المحتويات

الفصل الثالث: حركيات النقطة المادية

الفصل الرابع: تحريك النقطة المادية

الفصل الخامس: العمل و الطاقة للنقطة المادية

المــــــلاحـــــق

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمـــــــة

هناك شبه ايمان ان المستقبل العلمي العربي مرتبط الى حد كبير بعملية تعريب التعليم في كل مراحله. في هذا العصر الذي تتسارع فيه التكنولوجيا والمنجزات العلمية التي تسيطر على مصائر كل الشعوب، فليس من العدل ان نحرم لغتنا العربية من الابداع في العلم والتكنولوجيا.

محاولتي هنا ماهي الا تجميع بعض المعلومات وتبسيطها لتقدم بكل سهولة الى الطالب، وخاصة طلاب سنة الاولى علوم وتقنيات وعلوم المادة حيث تخضع هذه المحاضرات الى المقرر الدراسي الوزاري مع بعض التمارين التوضيحية والملاحق المساعدة.

ان اسهامات العالمان نيوتن وغاليلي في مجال الميكانيك الكلاسيكي ذات اهمية بل هي اساس لكل المجالات الاخرى. فلا يمكن ان نذكر الميكانيك النسبي ولا حتى الكوانتي دون التعرض الى الميكانيك الكلاسيكي والخوض في قوانينه.

أملي كبير ان يكون هذا الجهد عونا للطلبة على استيعاب المفاهيم الاساسية في الميكانيك للنقطة المادية، ويبقى هذا الجهد لا يخلو من الملاحظات هنا أو هناك اتمنى ان تصلنا وهذا طبعا من كرم القارء.

د.شهرة ثورية

أستاذ محاضر بجامعة ورقلة

الفصل الأول

التحليل البعدي وحساب الارتياب

من الضروري التحكم في مفاهيم أبعاد ووحدات المقادير الفيزيائية، يكون ذلك باستخدام التحليل البعدي (*Analyse dimensionnelle*)، إذ يسمح لنا بإيجاد العلاقات التي تربط بين المقادير الفيزيائية، أي وضع العلاقات والقوانين، كذا تدارك الأخطاء المرتكبة في المعادلات، من خلال دراسة تجانسها. سنرى في هذا الفصل كيفية تحديد بعد مقدار فيزيائي و معادلة أبعاد العلاقات بين المقادير الفيزيائية، وسنذكر استعمالات التحليل البعدي كأداة لدراسة تجانس المعادلات والبحث عن أشكال المعادلات الرياضية، و كما سنتطرق إلى أنظمة الوحدات الدولية الأكثر استعمالا، وطريقة التحول من نظام إلى آخر. سنعطي في نهاية الفصل مفاهيم الارتياب والطرق الرياضية لحسابها.

1.1 معادلة الأبعاد

لنعرف أولا المقدار الفيزيائي (*grandeur physique*)، فهو كل مقدار قابل للقياس، أي يمكن مقارنته بمقدار آخر من نفس الطبيعة واعتبار هذا الأخير كوحدة مثل: الطول، الحرارة، القوة...

و من بين المقادير القابلة للقياس مقادير عرفها الإنسان لاستخداماته، ومقادير أخرى حسية تنبع من تعوده عليها و إحساسه بها دون إعطائها تعريفا (غير قابلة للتعريف) وهي مقادير متفق عليها، وعدد هذه المقادير محدد، وهي سبع تدعى بالمقادير الأساسية: الطول، الكتلة، الزمن، شدة التيار، الحرارة، كمية المادة و الشدة الضوئية، حيث تسمح هذه المقادير الأساسية بكتابة كل المقادير الأخرى على شكل علاقات رياضية مثلا: القوة التي هي مقدار غير أساسي، يمكن كتابته بدلالة المقادير الأساسية الكتلة، الطول والزمن.

تتميز المقادير الواصفة للظاهرة الفيزيائية بـ' البعد(dimension)'، فبعد مقدار يشرح الطبيعة الفيزيائية لهذا المقدار.

معادلة الأبعاد (équation aux dimensions) هي التعبير الرمزي عن العلاقات بين المقادير الفيزيائية المختلفة. فالبعد أو معادلة الأبعاد للمقدار الفيزيائي G تكتب على الشكل $[G]$.

ولفهمها نتبع الملاحظات التالية:

- ✓ عدم طرح نظام الوحدات عند كتابة معادلة أبعاد المقدار.
- ✓ إذا كان $[G] = 1$ فان المقدار الفيزيائي G ثابت ، في الواقع قد يكون للمقدار الفيزيائي الثابت بدون بعد وحدة مثلا: $[2\pi] = 1$ وحد المقدار 2π قد تكون الراديان أو الدرجات، و $\left[\frac{1}{2}\right] = 1$ والمقدار $\frac{1}{2}$ بدون وحدة.
- ✓ تكون المعادلة الفيزيائية متجانسة إذا كان لطرفيها نفس البعد.
- ✓ كل المقادير الفيزيائية مشتقة في الأصل من سبعة مقادير أساسية، سنعطي لكل منها رمزا كبعد خاص له، و باقي أبعاد المقادير الأخرى تعطى بدلالتها:

المقدار الأساسي	الرمز الخاص للبعد
الطول (*Longueur*)	$L = [\text{الطول}]$
الكتلة (*Mass*)	$M = [\text{الكتلة}]$
الزمن (*Temps*)	$T = [\text{الزمن}]$
شدة التيار(*Intensité du courant électrique*)	$I = [\text{شدة التيار}]$
درجة الحرارة (*Température*)	$\theta = [\text{درجة الحرارة}]$
كمية المادة (*Quantité de matière*)	$N = [\text{كمية المادة}]$
الشدة الضوئية (*Intensité lumineuse*)	$J = [\text{الشدة الضوئية}]$

- ✓ بعد جداء مقدارين هو جداء بعديهما:

$$[AB] = [A][B]$$

مثال: بعد السرعة v:

$$v = {}^{t}/_{x} \Longrightarrow [v] = [t][x]^{-1} = TL^{-1}$$

✓ بعد المقدار A^n هو $[A]^n = [A^n]$ حيث n عدد بدون بعد ولا وحدة.

مثال: بعد السطح S لمربع طول ضلعه l:

$$S = l^2 \Longrightarrow [S] = [l^2] = [l]^2 = L^2$$

✓ بالنسبة للدوال المثلثية و اللوغاريتمية والآسية: $\cos u$ و e^u و $\ln u$ ... يكون المقدار u بدون بعد.

✓ معادلة أبعاد أي مقدار فيزيائي G يمكن وضعها على الشكل التالي:

$$[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$$

ملاحظة: في الميكانيكا نحتاج فقط إلى ثلاثة مقادير فيزيائية هي الطول، الكتلة و الزمن.

2.1 استعمال التحليل البعدي: التحقق من تجانس المعادلات

عند وضع العبارات الرياضية (القوانين)، يسمح لنا التحليل البعدي بالتحقق من تجانسها وتصحيح التناقضات فيها إذا وجدت، فأية علاقة غير متجانسة بين المقادير الفيزيائية هي علاقة خاطئة.

تمرين 1:

التحقق من تجانس عبارة الدور النواس البسيط:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/\mathrm{g}}$$

حيث l طول النواس و g الجاذبية الأرضية.

لكي تكون المعادلة متجانسة يجب أن يكون بُعد الطرف الأول للمعادلة يساوي بعد الطرف الثاني.

بُعد الطرف الأول: $[T_0] =$

بُعد الطرف الثاني: $\left[2\pi\sqrt{l/\mathrm{g}}\right] = [l]^{1/2}[\mathrm{g}]^{-1/2}$

لدينا أن:

$[l] = L$ و $[\mathrm{g}] = LT^{-2}$.

فيكون:

$$[l]^{1/2}[\mathrm{g}]^{-1/2} = L^{1/2}L^{-1/2}(T^{-2})^{-1/2} = T$$

ومنه بُعد الطرف الأول يساوي بُعد الطرف الثاني أي أن المعادلة متجانسة.

ملاحظة: معادلة متجانسة $\Longleftarrow$ فليست بالضرورة صحيحة

3.1 استعمال التحليل البعدي: إيجاد شكل علاقة المقدار $G = f(A, B, C, \dots)$

نفرض أن المقدار الفيزيائي G يعبر عنه بدلالة مقادير فيزيائية أخرى A و B و C...، من أجل تحديد الدالة $f(A, B, C, \dots)$:

- ✓ نبحث عن أبعاد المقادير الفيزيائية A و B و C....
- ✓ ثم نبحث عن المعاملات α و β و γ... بمقارنة بعد طرفي المعادلة التالية:

$$G = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma} \dots$$

حيث k ثابت بدون وحدة يتعين بطريقة أخرى.

تمرين 2:

لنحاول الوصول إلى علاقة دور النواس البسيط في المثال السابق، الذي يتعلق بطول النواس l و الجاذبية الأرضية g. سنبحث عن علاقة من الشكل التالي:

$$T_0 = f(l, \mathrm{g})$$

نضع T_0 على الشكل التالي:

$$\mathrm{T}_0 = kl^{\alpha}\mathrm{g}^{\beta}$$

أبعاد المقادير المتعلقة بدور النواس:

$$[T_0] = T \qquad (1)$$
$$[l] = L, \quad [\mathrm{g}] = LT^{-2}$$

البحث عن α و β :

$$[kl^{\alpha}\mathrm{g}^{\beta}] = [l]^{\alpha}[\mathrm{g}]^{\beta} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta} \qquad (2)$$

نقارن بين المعادلة (1) و(2) نجد:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T_0 = kl^{\frac{1}{2}}\mathrm{g}^{-\frac{1}{2}} = k\sqrt{l/\mathrm{g}}$$

أما الثابت k فيعين بالتجربة، ولقد وجد مساويا 2π.

4.1 أنظمة الوحدات

لقد اتفق عالميا بعد الثورة الفرنسية على نظام أو جملة الوحدات (*système d’unités*) للمقادير الأساسية، كي تكون اللغة المشترك. قد تتغير الوحدة للمقادير بتغير النظام المستعمل، في حين تبقى أبعادها ثابتة. ولقد شاع استخدام جملتي وحدات هي:

جملة الوحدات الدولية SI(***système international d’unités***)**:** يوضح الجدول التالي وحدات قياس المقادير الأساسية لهذا النظام:

المقدار(**Grandeur**)	الوحدة (**Unité**)	الرمز(**Symbole**)
الطول (*Longueur*)	المتر (*mètre*)	*m*
الكتلة (*Mass*)	الكيلوغرام (*kilogramme*)	*kg*
الزمن (*Temps*)	الثانية (*seconde*)	*s*
التيار الكهربائي (*Courant électrique*)	أمبير (*ampère*)	*A*
درجة الحرارة (*Température*)	الكلفن(*kelvin*)	*K*
كمية المادة (*Quantité de matière*)	مول (*mol*)	*mol*
الشدة الضوئية (*Intensité lumineuse*)	الشمعة (*candela*)[1]	*cd*

تضاف إلى هذه الوحدات وحدتين مكملتين تستخدمان لقياس الزوايا المستوية و الزوايا المجسمة[2]:

المقدار(**Grandeur**)	الوحدة (**Unité**)	الرمز(**Symbole**)
الزاوية المستوية (*Angle plane*)	راديان (*radian*)	*rad*
الزاوية المجسمة (*Angle solide*)	ستراديان (*stéradian*)	*sr*

و هناك أيضا وحدات وضعت للاختصار، مثل:

وحدة القوة وهي النيوتن (*Newton*): $\text{kg}m\, s^{-2} = N$

---

[1] الشمعة هي وحدة قياس الشدة الضوئية وهي تساوي $(1/60)$ من شدة إضاءة إشعاع جسم أسود مساحته $(1cm^2)$ عند درجة الحرارة $(2045K)$، وهي درجة حرارة تجمد البلاتين.

[2] الزاوية المجسمة هي الزاوية التي تصنعها مساحة سطح، في معلم ثلاثي الابعاد، بالنسبة لنقطة معينة، وتساوي إسقاط هذه المساحة على كرة مركزها هذه النقطة، مقسوما على مربع نصف قطر الكرة.

وحدة الطاقة وهي الجول (*Joule*): $kgm^2\ s^{-2} = J$

وحدة الشحنة الكهربائية وهي كولوم (*Coulomb*): $sA = C$.

الجملة الوحدات CGS (*sous-système du système international*): وهي نظام تحت النظام الدولي SI:

المقدار(*Grandeur*)	الوحدة (*Unité*)	الرمز(*Symbole*)
الطول(*Longueur*)	السنتمتر(*centimètre*)	cm
الكتلة(*Mass*)	الغرام(*gramme*)	g
الزمن(*Temps*)	الثانية (*seconde*)	s

وباقي المقادير الأساسية تحمل نفس الوحدة في النظام الدولي. و بالمثل هناك وحدات وضعت للاختصار، مثل:

وحدة القوة وهي داين (*dyne*): $gcms^{-1} = dyn$.

وحدة الطاقة وهي أرغ (*erg*): $gcm^{-2}s^{-2} = erg$.

وحدة اللزوجة وهي بواز(*poise*): $gcm^{-1}s^{-1} = P$.

تمرين3 :

إيجاد معادلة أبعاد العمل ؟ ووحدته في النظام الدولي SI و النظام CGS؟

$W = F.l$

$\Longrightarrow [W] = [F].[l] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$

في النظام SI: $joul = kg\, m^2s^{-2}$.

في النظام CGS : $erg = \text{g}\, cm^2s^{-2}$.

5.1 التحول من وحدات نظام إلى آخر

كما رأينا سابقا، معادلة الأبعاد لا تربط فقط المقادير فيما بينها، لكن تعطي الوحدات المكافئة للنظام المستعمل، وتعطي قيمة ووحدة الثوابت الفيزيائية تبعا لذلك النظام المتبع، قد تجبرنا

المسائل ان تكون هذه الثوابت في نظام غير نظامنا المعمول به، لذلك فإن التحليل البعدي يسمح لنا أيضا بتحويل تلك الثوابت من نظام إلى نظام، فكيف يتم ذلك؟

ليكن المقدار G يساوي القيمة العددية g ووحدته هي $U_G(S_1)$ في النظام S_1 و قيمته g' ذات الوحدة $U_G(S_2)$ في النظام S_2 فيكون لدينا:

$$G = gU_G(S_1) = g'U_G(S_2)$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{U_G(S_1)}{U_G(S_2)} \qquad (1)$$

فإذا علمت إحدى القيمتين g أو g'، و الوحدات المستعملة في كل النظامين أمكننا إيجاد القيمة الأخرى في النظام الثاني.

تمرين 4:

تحويل الجول من النظام الدولي SI (S_1) إلى النظام CGS (S_2):

لدينا:

$$1\,joul = g'erg$$

حسب العلاقة (1) نجد ان :

$$g' = 1\frac{joul}{erg} = \frac{\text{kg}\, m^2 s^{-2}}{\text{g}\, cm^2 s^{-2}} = \frac{kg\, m^2 s^{-2}}{10^{-3} kg 10^{-4} m^2 s^{-2}} = 10^7$$

$$1\text{joul} = 10^7 erg$$

6.1 حساب الارتياب في القياس

قسم كبير من علم الفيزياء تجريبي كمي يقوم على القياس، وقد يكون هذا القياس مباشرا باستعمال الآلات مثل: قياس الزمن بواسطة كرونومتر، أو عن طريق قياس مقادير أخرى ترتبط بمعادلة مع المقدار المراد قياسه بطريقة غير مباشرة مثل: تعيين السرعة بعد القياس المباشر للزمن و المسافة.

تعتمد دراسة الظواهر على القياسات التي تتميز بعدم التعيين الدقيق، الناتج عن الأخطاء التي تنجم عن: المجرب، جهاز القياس، طريقة القياس ...، تقسم الأخطاء إلى نوعين:

الخطأ المطلق (*Erreur absolue*): الخطأ المطلق δG للمقدار G هو الفرق بين القيمة المقاسة[3] (*Valeur mesurée*) والقيمة الحقيقية G_M (*Valeur exacte*) وهو مقدار جبري متبوع بوحدة.

الخطأ النسبي (*Erreur relative*): هو النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المقاسة $\frac{\delta G}{G_M}$.

ملاحظة: يتعذر معرفة الخطأ المطلق وبالتالي الخطأ النسبي لأنه لا يمكن معرفة القيمة الحقيقة للمقدار، لذلك ندخل مفهوم الارتياب.

الارتياب المطلق (*Incertitude absolue*): الارتياب المطلق ΔG للمقدار G هو الحد الأعلى للخطأ المطلق $\Delta G \leq |\delta G|$ ، و هو عدد موجب يأخذ وحدة المقدار G حيث:

$$G = G_M \pm \Delta G$$

الارتياب النسبي (*Incertitude relative*): هو الحد الأعلى للخطأ النسبي $\frac{\Delta G}{G_M}$ وهو النسبة بين الارتياب المطلق والقيمة المقاسة، وهو عدد حسابي بدون وحدة، ويستعمل لتمييز دقة القياس.

الطرق الرياضية لحساب الارتياب في القياس غير المباشر: هناك طريقتان لحساب الارتياب:

1. طريقة التفاضل التام (*Différentielles totales*):

ليكن المقدار G مقاس بطريقة غير مباشرة عن طريق قياس المقادير x و y و z المقاسة بطريقة مباشرة، حيث Δx و Δy و Δz الارتيابات المطلقة للمقادير السابقة على الترتيب. نريد حساب الارتياب المطلق والنسبي للمقدار G حيث: $\mathrm{G} = f(x, y, z)$.

التفاضل التام للمقدار G يعطى:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

لحساب الارتياب المطلق نأخذ القيمة المطلقة لمعاملات الأخطاء، ونحول d إلى Δ في المعادلة السابقة:

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|\Delta z$$

[3] القيمة المقاسة هي القيمة التي نحصل عليها عند القياس.

الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{x}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\right|\frac{\Delta x}{x} + \left|\frac{y}{G}\frac{\partial G}{\partial y}\right|\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{z}{G}\frac{\partial G}{\partial z}\right|\frac{\Delta z}{z}$$

2. طريقة التفاضل اللوغاريتمي (***Différentielles logarithmiques***):

نأخذ الدالة السابقة نفسها: $G = f(x,y,z)$، ندخل اللوغاريتم على الدالة ونفاضل:

$$log G = log f(x,y,z) \Rightarrow d(log G) = d\big(log f(x,y,z)\big)$$

وبنفس الخطوات السابقة نكمل حساب الارتياب النسبي و المطلق.

تمرين5:

أحسب بطريقة التفاضل التام و التفاضل اللوغاريتمي الارتياب النسبي للمقدار G حيث:

$$G(a,b) = \frac{a}{a-b}$$

طريقة التفاضل التام:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial a}da + \frac{\partial G}{\partial b}db = \frac{-b}{(a-b)^2}da + \frac{a}{(a-b)^2}db$$

نقسم أطراف المعادلة على G فنحصل:

$$\frac{dG}{G} = \frac{-b}{(a-b)}\frac{da}{a} + \frac{b}{(a-b)}\frac{db}{b}$$

و منه الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{-b}{a-b}\right|\frac{\Delta a}{a} + \left|\frac{b}{a-b}\right|\frac{\Delta b}{b} = \left|\frac{b}{a-b}\right|\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

طريقة التفاضل اللوغاريتمي:

$$logG(a,b) = log\left(\frac{a}{a-b}\right) \Rightarrow logG = \log a - \log(a-b)$$

$$\Rightarrow dlogG = dlog\, a - dlog(a-b)$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{da}{a} - \frac{da}{a-b} + \frac{db}{a-b} = \frac{-b}{a-b}\frac{da}{a} + \frac{b}{a-b}\frac{db}{b}$$

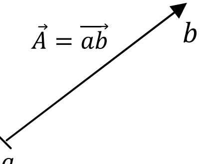
و منه الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{-b}{a-b}\right|\frac{\Delta a}{a} + \left|\frac{b}{a-b}\right|\frac{\Delta b}{b} = \left|\frac{b}{a-b}\right|\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

الفصل الثاني

الحساب الشعاعي

تقسم القيم الفيزيائية إلى مجموعتين أساسيتين سلمية و شعاعيه. حيث تتميز الأولى بمقدار فقط (*grandeur*) مثل: الكتلة، الزمن، الحرارة... في حين تتميز الثانية بمقدار (*module*) و اتجاه (*direction*) مثال: السرعة، القوة... ويرمز للشعاع بـ $\vec{A}$ ويدعى مقداره بالطويلة و يرمز لها بـ $|\vec{A}|$ (المسافة بين بداية الشعاع ونهايته) وهي مقدار موجب.

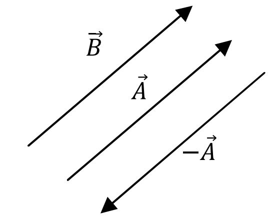


$$|\vec{A}| = ab = A$$

1.2 خواص الأشعة



✓ $\vec{A} = \vec{B}$ ⇐ لهما نفس المقدار (الطويلة) و الاتجاه.



✓ لكل شعاع $\vec{A}$ شعاع معكوس (*opposée*) يساوي $(-\vec{A})$.

✓ **ضرب شعاع بقيمة سلمية**: جداء الشعاع $\vec{A}$ بالعدد السلمي a هو الشعاع $a\vec{A}$ حيث $\vec{A} // a\vec{A}$:

- إذا كان $a > 0$ ⇐ له نفس اتجاه $\vec{A}$ وطويلته هي $a\,|\vec{A}|$.
- إذا كان $a = 0$ ⇐ $a\vec{A} = \vec{0}$.
- إذا كان $a < 0$ ⇐ له عكس اتجاه $\vec{A}$ و طويلته هي $-a|\vec{A}|$.
- إذا كان $|a| > 1$ ⇐ فإن الشعاع $\vec{A}$ يتمدد ويتقلص إذا كان $|a| < 1$.
- $1.\vec{A} = \vec{A}$ ، $0.\vec{A} = \vec{0}$ و $a.\vec{0} = \vec{0}$

1: عنصر سلمي حيادي (*neutre*) في عمليات ضرب شعاع بقيمة سلمية.

0: عنصر سلمي ماص (*absorbant*) في عمليات ضرب شعاع بقيمة سلمية.

- جداء شعاع بسلمي هو توزيعي على المجموع السلمي:

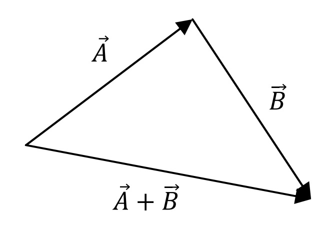
$$(a+b).\vec{A} = a.\vec{A} + b.\vec{A}$$

ملاحظة: الكتابة $\vec{u}.a$ ليس لها معنى، و الصحيح: $a.\vec{u}$.

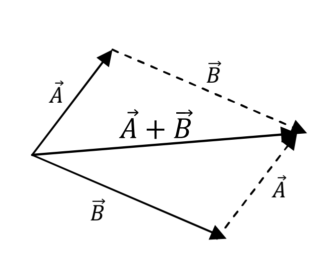
- يكون **شعاعان متوازيين** إذا وفقط إذا كانا مرتبطين خطيا:

$\vec{A}//\vec{B} \Leftarrow$ يوجد $a \in \mathcal{R}$ حيث $a\vec{B} = \vec{A}$

✓ **مجموع شعاعين** (***somme de deux vecteurs***): مجموع الشعاعين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ هو شعاع يرمز له بـ $\vec{A} + \vec{B}$ ، ينشأ هندسيا بإحدى الطريقتين التاليتين:



ط1: نضع بداية الشعاع الثاني عند نهاية الأول ويكون المجموع الشعاع الذي يربط بداية الأول بنهاية الثاني يصنع الضلع الثالث للمثلث المشكل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (*triangle*).



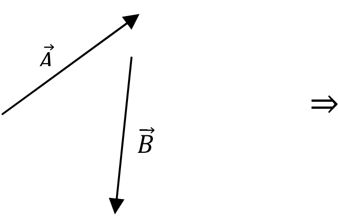
ط2: نضع بدايتي الشعاعين عند النقطة نفسها ونرسم متوازي الأضلاع (*parallélogramme*) حيث يكون الشعاعان ضلعيه. المجموع إذن هو قطر متوازي الأضلاع وبدايته هي نفسها بداية الشعاعين.

- **علاقة شال** (***relation de Chale***): $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$
- $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{aa} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{bc}$
- $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ ، $\vec{0}$ هو شعاع حيادي (*neutre*) في الجمع الشعاعي.
- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ، الجمع الشعاعي تبديلي (*commutativité*).
- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ ، الجمع الشعاعي تجميعي (*associativité*).
- $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$، الجمع الشعاعي توزيعي (*distributivité*).

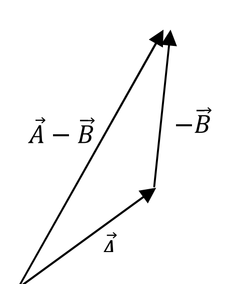
ملاحظة: في حالة مجموع أشعة يفوق اثنين يتم أيضا بالطرق نفسها.

✓ **الفرق بين شعاعين** (***différence de deux vecteurs***): الفرق بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو شعاع يرمزله بـ $\vec{A} - \vec{B}$، وعملية الفرق بين شعاعين تشبه عملية الجمع حيث:

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



$\Rightarrow$



✓ **شعاع الوحدة** (***vecteur unitaire***): يتميز شعاع الوحدة بأن طويلته تساوي الواحد.

فشعاع وحدة الشعاع $\vec{F}$ هو شعاع $\vec{u}$ حيث:

$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \Leftarrow \vec{F} = |\vec{F}|\vec{u}$$

✓ **مسقط شعاع على محور** (***projection d'un vecteur***):

مسقط الشعاع $\overrightarrow{ab}$ على المحور المعرف بالشعاع $\vec{u}$ يساوي طول القطعة المستقيمة $a'b'$ حيث:

$$a'b' = P_{\overrightarrow{ab}/\vec{u}} = |\overrightarrow{ab}| \cos\alpha = ab\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a'b'}{ab}$$

2.2 جملة الإسناد (المعلم المتعامد و المتجانس): المعلم الديكارتي

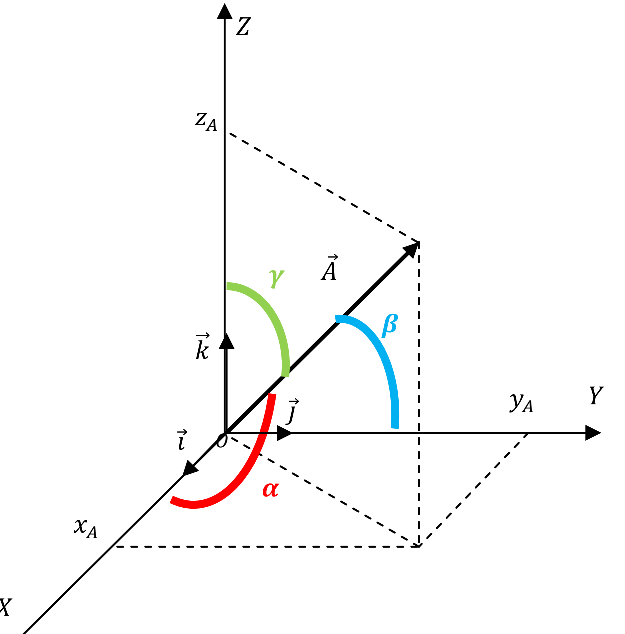
التمثيل الهندسي للأشعة يعتمد على الإحداثيات أي على جملة الإسناد (معلم *repère*)، مثلا: الإحداثيات الديكارتية (*coordonnées cartésiennes*) $OXYZ$[4] الممثلة في الشكل بثلاثة محاور متعامدة OX، OY و OZ وثلاث أشعة وحدة $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$. يمثل الشعاع $\vec{A}$ في هذه الجملة بثلاث مركبات: A_x، A_y و A_z وهي عبارة عن مسقط الشعاع $\vec{A}$ على المحاور OX، OY و OZ حيث:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

فيكون لدينا:

$$A_x = |\vec{A}|\cos\alpha$$
$$A_y = |\vec{A}|\cos\beta$$
$$A_z = |\vec{A}|\cos\gamma$$

حيث α ، β و γ زوايا التوجيه التي يشكلها $\vec{A}$ مع الجهة الموجبة للمحاور OX و OY و OZ على



---

[4] يرمز غالبا للمعلم بـ $OXYZ$ تعبيرا على المبدأ $'O'$ والمحاور الثلاثة المتعامدة OX، OY و OZ، وقد يختلف الرمز في بعض المراجع فنجده مثلا $(,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعبيرا على أشعة الوحدة الموازية للمحاور الثلاثة السابقة.

الترتيب، ونسمي $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ جيوب تمام توجيه الشعاع $\vec{A}$.

✓ إذا علمنا أن إحداثيات نقطة النهاية $b(x_b, y_b, z_b)$ والبداية $a(x_a, y_a, z_a)$ للشعاع $\vec{A}$ يكون لدينا:

$$\vec{A} = \overrightarrow{ab}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}, \qquad \vec{A} = (x_b - x_a)\vec{\imath} + (y_b - y_a)\vec{\jmath} + (z_b - z_a)\vec{k}$$

✓ مركبات محصلة جمع الشعاعين $\vec{A} + \vec{B}$ حيث $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ هي مجموع المركبات:

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

✓ مركبات حاصل طرح الشعاعين $\vec{A} - \vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \\ A_z - B_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{\imath} + \left(A_y - B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z - B_z)\vec{k}$$

✓ طويلة الشعاع $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ هي:

$$|\vec{A}| = A = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ملاحظة: جيوب تمام التوجيه تحقق:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

البرهان:

$$\begin{aligned} A &= \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (A^2\cos\alpha^2 + A^2\cos\beta^2 + A^2\cos\gamma^2)^{1/2} \\ &= A(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) \end{aligned}$$

و منه:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

يمكن كتابة جيوب تمام التوجيه للشعاع $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

تمرين1:

أوجد جيوب تمام التوجيه وشعاع الوحدة للشعاع: $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

جيوب تمام التوجيه:

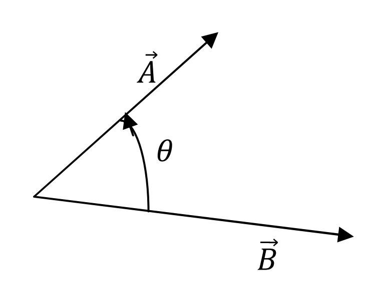
$$|\vec{A}| = A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} = A = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{4}{\sqrt{29}} \ , \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{29}} \ , \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{29}}$$

شعاع الوحدة:

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{4\vec{i}}{\sqrt{29}} - \frac{2\vec{j}}{\sqrt{29}} - \frac{3\vec{k}}{\sqrt{29}}$$

3.2 الجداء السلمي لشعاعين



إذا كان $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$ شعاعين يشكلان مع بعض الزاوية θ، نسمي الجداء السلمي للشعاعين (*produit scalaire de deux vecteurs*)، ونرمز له بـ $\vec{A}\ .\ \overrightarrow{B}$، العدد الحقيقي حيث:

$$\vec{A}\ .\ \overrightarrow{B} = |\vec{A}||\overrightarrow{B}|\cos\left(\widehat{\vec{A}\ ,\ \overrightarrow{B}}\right) = AB\cos\theta$$

$\theta = \left(\widehat{\vec{A}\ ,\ \overrightarrow{B}}\right)$: الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$.

4.2 خصائص الجداء السلمي

1. التوزيعية: $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}\ .\ \overrightarrow{B} + \vec{A}.\ \vec{C}$

2. التبديلية: $\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}.\vec{A}$

3. $(\vec{A}\lambda).\vec{B} = \vec{A}.(\lambda\vec{B}) = \lambda\vec{A}.\vec{B}$ حيث $\lambda \in R$.

4. $\vec{A}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{A} = 0$، $\vec{0}$ عنصر ماص في الجداء السلمي.

5. $\vec{A}\,.\overrightarrow{A}$ يدعى المربع السلمي للشعاع $\vec{A}$ وهو $A^2 = A^2 \geq 0$ ، والمساواة غير محققة إلا إذا كان $\vec{A} = \vec{0}$.

6. $\vec{A} \perp \overrightarrow{B} \Leftarrow \vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} = 0$ (لان : $\cos\left(\widehat{\vec{A}\,,\overrightarrow{B}}\right) = 0$)

7. في المعلم الديكارتي المتعامد $OXYZ$ نجد أن:

$$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$$

8. يكتب الجداء السلمي $\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B}$ بدلالة مركبات الشعاعين $\overrightarrow{}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

(نستعمل خاصية التوزيع (1) والخاصية السابقة (7)):

$$\begin{aligned}\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} &= \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right) \\ &= A_xB_x\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} + A_yB_y\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} + A_zB_z\cdot\vec{k} + A_xB_y\vec{\imath}\;\cdot\vec{\jmath} + \cdots \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

9. يمكن إيجاد الزاوية المحصورة بين شعاعين $\overrightarrow{}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$:

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B}}{|\vec{A}\,|.\,|\overrightarrow{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

10. المربع السلمي:

$$\vec{A}^2 = A^2 = \vec{A}\,.\overrightarrow{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$$

يمكن كتابة مسقط شعاع $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ على الشعاع $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ بدلالة الجداء السلمي بينهما:

$$P_{\vec{A}/\overrightarrow{B}} = |\vec{A}\,|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = |\vec{A}\,|\,\frac{\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B}}{|\vec{A}\,|.\,|\overrightarrow{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{B}$$

تمرين2:

لتكن الأشعة:

$$\vec{A} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \ ; \qquad \vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \ ; \quad \vec{C} = x\vec{i} + \vec{j} - y\vec{k}$$

1. أحسب: $\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$.
2. أحسب مسقط الشعاع $\vec{A}$ على الشعاع $\vec{B}$.
3. أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاع $\vec{A}$ و $\vec{A} + \vec{B}$.
4. أوجد x و y حتى يكون $\vec{C}$ متعامد مع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد .

الحل:

.1

$$\vec{A} + \vec{B} = (-2+2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (3+1)\vec{k} = 4\vec{k}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (-2)(2) + (1)(-1) + (3)(1) = -2$$
$$\vec{A}.(\vec{A} + \vec{B}) = (4)(3) = 12$$

.2

$$|\vec{A}| = \sqrt{14} \ , |\vec{B}| = \sqrt{6} \ , |\vec{A} + \vec{B}| = 4$$
$$P_{\vec{A}/\vec{B}} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

.3

$$\cos\left(\widehat{\vec{A}, \vec{A} + \vec{B}}\right) = \frac{\vec{A}.(\vec{A} + \vec{B})}{|\vec{A}||(\vec{A} + \vec{B})|} = \frac{12}{\sqrt{144}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

.4

$$\vec{C} \perp \vec{A} \Rightarrow \vec{A}.\vec{C} = 0 \Longrightarrow \vec{A}.\vec{C} = -2x + 1 - 3y = 0$$
$$\vec{C} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{B}.\vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{B}.\vec{C} = 2x - 1 - y = 0$$

بحل جملة المعادلة نجد:

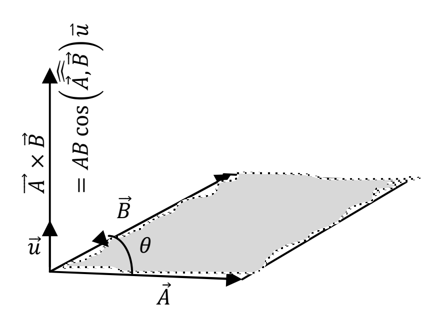
$$x = \frac{1}{2} \text{ و } y = 0$$

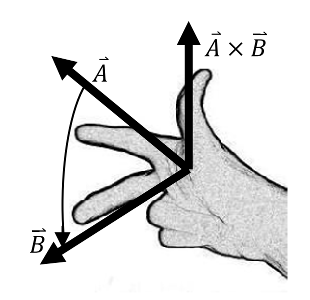
5.2 الجداء الشعاعي

نعرف الجداء الشعاعي للشعاعين (*produit vectoriel*) $\vec{A}$ و $\vec{B}$، ويرمز له $\vec{A}\times\vec{B}$ ، أنه الشعاع العمودي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد وطويلته تساوي:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$$

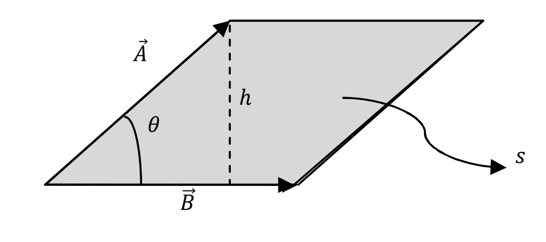
يعين اتجاه $\vec{A}\times\vec{B}$ بقاعدة اليد اليمنى .





✓ المقدار $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ يساوي مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

برهان:



مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يساوي:

$$S = \left|\vec{B}\right|h$$

$$h = \left|\vec{A}\right|\sin\theta \Longrightarrow S = BA\sin\theta = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

6.2 خصائص الجداء الشعاعي

1. $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$
2. الجداء الشعاعي توزيعي على الجمع: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
3. $\boldsymbol{\lambda}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\times\left(\lambda\vec{B}\right) = \left(\lambda\vec{A}\right)\times\vec{B}$ حيث $\lambda \in R$.
4. $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0} \Leftarrow \vec{A}//\vec{B}$.

✓ **تطبيق لجداء الشعاعي: شرط انتماء نقطة إلى مستقيم.**

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء، كي تنتمي هذه النقطة إلى المستقيم (Δ) المار بالنقطتين a و b يجب أن تشكل مع أي نقطة من المستقيم (Δ) كالنقطة a مثلا شعاعا موازيا للشعاع $\overrightarrow{ab}$ ، وبما أن توازي شعاعين يعني انعدام الجداء الشعاعي، فإن معادلة المستقيم (Δ) المتمثلة أيضا في شرط انتماء النقطة M إلى المستقيم تكون:

$$\overrightarrow{aM} \times \overrightarrow{ab} = \vec{0}$$

5. في المعلم الديكارتي $OXYZ$ المتعامد والمتجانس لدينا:

$\vec{j}$ $\vec{k}$ + $\vec{\imath}$

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}\ , \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

6. يكتب الجداء الشعاعي $\vec{A} \times \overrightarrow{B}$ بدلالة المركبات $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و باستخدام الخاصية (2) و (5) للجداء الشعاعي:

$$\vec{A} \times \overrightarrow{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right) \times \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right)$$
$$= A_xB_x\vec{\imath} \times \vec{\imath} + A_yB_y\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + A_zB_z\vec{k} \times \vec{k} + A_xB_y\vec{\imath} \times \vec{\jmath} \ldots$$
$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

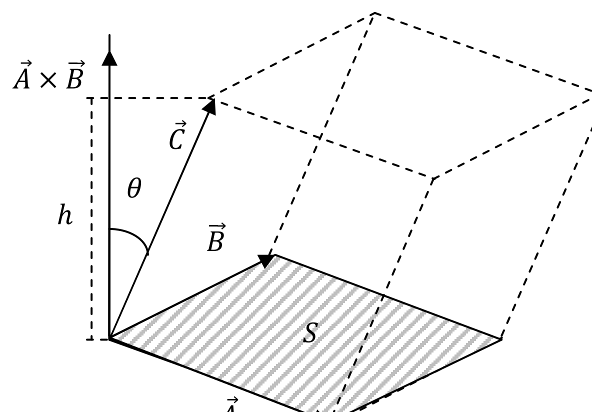
7. **الجداء المختلط**: نسمي الجداء المختلط للأشعة $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$ و $\vec{C}$، والذي نرمز له $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right)$، المقدار السلمي المعرف بـ:

$$\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

- ✓ $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right) = \overrightarrow{B}.\left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right) = -\vec{A}.\left(\vec{C} \times \overrightarrow{B}\right)$

ملاحظة: إذا كان شعاعان من الأشعة الثلاثة متساويين أو متوازيين فإن الجداء المختلط بين الأشعة الثلاثة معدوم.

✓ **تطبيق 1 للجداء المختلط**: القيمة المطلقة للجداء المختلط يمثل حجم متوازي الوجوه المعرف بأضلعه الثلاث $\vec{A}$، $\vec{C}$ و $\vec{B}$:



$$V = S.h$$
$$S = |\vec{A}\times\vec{B}| \Rightarrow V = |\vec{A}\times\vec{B}|.h$$
$$h = |\vec{C}|\cos\theta$$
$$V = |\vec{A}\times\vec{B}||\vec{C}|\cos\theta$$
$$= |\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})|$$

✓ **تطبيق 2 للجداء المختلط**: ليكن (P) المستوي الذي تنتمي إليه النقاط الثلاث a، b و c وكذلك الأشعة $\overrightarrow{ab}$ ، $\overrightarrow{\mathrm{ac}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{bc}}$، وليكن $\vec{N}$ شعاع حيث: $\vec{N} = \overrightarrow{ab}\times\overrightarrow{ac}$. بما أن $\vec{N}$ عمودي على $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{\mathrm{ac}}$ معا فهو عمودي على المستوي (P)، وبهذا شرط انتماء أية نقطة M الى هذا المستوي (P) هو أن يشكل مع أية نقطة من المستوي، مثلا النقطة a شعاعا عموديا على $\vec{N}$ اي $\overrightarrow{aM}\cdot\vec{N} = 0$ ، فيصبح شرط انتماء أية نقطة M الى هذا المستوي (P) :

$$\overrightarrow{aM}\cdot(\overrightarrow{ab}\times\overrightarrow{ac}) = 0$$

ملاحظات:

✓ يعرف المستوي إما بثلاث نقاط تنتمي إليه أو بشعاعين أو نقطة وشعاع.

✓ يمكن إيجاد معادلة المستوي بتحقيق نفس الشرط: نفرض أن نقطة M تنتمي إلى المستوي المعرف بثلاث نقاط a، b و c حيث: $\overrightarrow{aM}\cdot(\overrightarrow{ab}\times\overrightarrow{ac}) = 0$.

8. **الجداء الثلاثي الشعاعي**: يعرف الجداء الثلاثي للأشعة $\vec{A}$، $\vec{C}$ و $\vec{B}$، نرمز له بـ $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، الشعاع $\vec{D}$ حيث:

$$\vec{D} = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

✓ $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

✓ $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$

تمرين 3:

1. ليكن في معلم متعامد ومتجانس $OXYZ$:

$$\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}\ ,\ \overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}=3\vec{\imath}+\vec{k}\ ,\ \overrightarrow{Oc}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

1. أوجد الشعاعين $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Ob}$.
2. أحسب الزوايا المحصورة بين الشعاعين: $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}$ و الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
3. أحسب مسقط الشعاع $\overrightarrow{Oa}$ على الشعاع $\overrightarrow{Ob}$.
4. أحسب زوايا التوجيه (جيوب تمام التوجيه) لـ $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Ob}$.
5. أحسب مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
6. أحسب حجم متوازي الوجوه المتشكل من الأشعة $\overrightarrow{Oa}$، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
7. أوجد شرط انتماء الأشعة $\vec{O}$، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oc}$ إلى مستو واحد.
8. أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطتين a و b.

الحل:

.1

$$\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k} \qquad |\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}|=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}=3\vec{\imath}+\vec{k} \qquad |\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}|=\sqrt{10}$$

بجمع المعادلتين:

$$2\overrightarrow{Oa}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}\Rightarrow \overrightarrow{Oa}=\vec{\imath}+\vec{\jmath} \qquad |\overrightarrow{Oa}|=\sqrt{2}$$

بطرح المعادلتين:

$$2\overrightarrow{Ob}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}\Rightarrow \overrightarrow{Ob}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k} \qquad |\overrightarrow{Ob}|=\sqrt{6}$$

.2

$$\cos\left(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Oa}\cdot\left(\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)}{|\overrightarrow{Oa}|\,|\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{Ob},\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Ob}\cdot\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)}{|\overrightarrow{Ob}|\,|\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}|}=\frac{7}{2\sqrt{15}}$$

.3

$$P_{\overrightarrow{Oa}/\overrightarrow{Ob}} = |\overrightarrow{Oa}|\cos(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Ob}) = \frac{\overrightarrow{Oa}\cdot\overrightarrow{Ob}}{|\overrightarrow{Ob}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

.4

من أجل $\vec{O}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = 0$

من اجل $\vec{O}$: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{6}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$

.5

$$S = |\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob})|$$

$$\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow S = \sqrt{11}$$ وحدة دولية

.6

$$V = |\overrightarrow{Oa}\cdot[\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob})]| = 0$$

.7

$$\overrightarrow{Oc}\cdot(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}) = 0$$

$$\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Oc}\cdot(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}) = x-y-3z = 0$$

شرط انتماء الأشعة $\overrightarrow{Oa}$، $\overrightarrow{Ob}$ و$\overrightarrow{Oc}$ إلى مستوي واحد هو: $x-y-3z=0$

.8

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي إلى المستقيم (Δ):

$$\overrightarrow{aM}\times\overrightarrow{ab} = \vec{0}$$

حيث: $\overrightarrow{aM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{ab}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{aM} \times \overrightarrow{ab} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (y+2z-1)\vec{i} - (x-z-1)\vec{j} + (-2x-y+3)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-z-1=0 \\ -2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x-1 \\ y = 3-2x \end{cases}$$

معادلة مستقيم [5]

7.2 اشتقاق الأشعة

تعريف الاشتقاق لشعاع (*dérivée d'un vecteur*) نفسه بالنسبة للمقدار السلمي، ليكن φ دالة سلمية بدلالة المتغير x فان:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

بالنسبة الى $\vec{A}$ شعاع يتعلق بـ x فيكون:

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x) - \vec{A}(x)}{\Delta x}$$

اشتقاق الأشعة له نفس خواص اشتقاق المقادير السلمية:

$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u} = A\vec{u}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{dA\vec{u}}{dx} = \frac{dA}{dx}\vec{u} + A\frac{d\vec{u}}{dx}$$

سوف نهتم بالأشعة المتعلقة بالزمن، والتي لها دور مهم في ميكانيكا النقطة المادية. ليكن الشعاع في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

فيكون:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

---

[5] يعرف المستقيم في المستوي بمعادلة واحدة، أما في الفضاء يعرف بدلالة معادلتين يكون فيها احد المجاهيل وسيطا والمجهولين المتبقين يعطيان بدلالة الوسيط.

في الإحداثيات الديكارتية تعتبر أشعة الوحدة $\vec{\imath}$ و$\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ ثابتة مقدارا واتجاها، وعليه فإن:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{0}$$

و لكننا قد نفقد هذه الخاصية في إحداثيات آخر.

خواص:

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$
$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{A})=\frac{d\lambda}{dt}\vec{A}+\lambda\frac{d\vec{B}}{dt}$$

ملاحظات:

1. إذا كان الشعاع $\vec{A}(t)$ موازيا للمستوي (P) فإن مشتقه الزمني $\frac{d\vec{A}}{dt}$ يكون موازيا لنفس المستوي (P). البرهان:

$\vec{A}$ شعاع موازي للمستوي (P) و $\vec{n}$ شعاع الوحدة العمودي على المستوي(P).

$$\vec{A}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{n}=0$$
$$\frac{d(\vec{A}.\vec{n})}{dt}=\frac{d(\vec{A})}{dt}\cdot\vec{n}+\vec{A}\cdot\frac{d(\vec{n})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{n}\quad\left(\frac{d\vec{n}}{dt}=\vec{0}\ \text{ثابت قيمة واتجاها}\ \vec{n}\right)$$
$$\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{n}=0\Longrightarrow\frac{d\vec{A}}{dt}\perp\vec{n}$$

أي أن $\frac{d\vec{A}}{dt}$ مواز لنفس المستوي (P).

2. إذا كان $\vec{A}$ شعاع حيث $|\vec{A}|$ قيمة ثابتة فان: $\vec{A}\perp\frac{d\vec{A}}{dt}$

البرهان :

$$\vec{A}.\vec{A}=(\vec{A})^2=A^2$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{A})=\frac{d}{dt}(\vec{A})^2=2\vec{A}\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d}{dt}A^2=0\longrightarrow\vec{A}\frac{d\vec{A}}{dt}=0\longrightarrow\vec{A}\perp\frac{d\vec{A}}{dt}$$

تمرين4:

ليكن الشعاع:

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} - (t^2 + 2)\vec{j} + (t^2 - 6t + 9)\vec{k}$$

أحسب $\frac{\vec{A}}{dt}$ و$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$، ثم عينهما في النقطة $t = 1$.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -2t\vec{j} + (2t - 6)\vec{k}, \qquad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{t=1} = -2\vec{j} - 4\vec{k}, \qquad \left.\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)_{t=1} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

8.2 المشتقات الجزئية

لنأخذ تابعا سلميا φ وآخر شعاعيا $\vec{A}$ لمجموعة الإحداثيات المتعلقة بالزمن:

$$\varphi(x, y, z, t) \quad و \quad \vec{A}(x, y, z, t)$$

يكتب المشتق الجزئي للتابع السلمي أو الشعاعي بالنسبة لأحد هذه المتحولات x مثلا على النحو: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}$ ، ويحسب كالمشتقة العادية تماما بالنسبة لهذا المتغير، وكأن بقية المتغيرات ثابتة، ويحدد التفاضل الكلي للتابعين φ و $\vec{A}$ كالتالي:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}dt$$

يمكن تعريف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}$$

و ايضا المشتقات المختلطة التي لا تتعلق بترتيب المتغيرات:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y\partial x}$$

9.2 تدرج دالة سلمية

ليكن التابع سلمي $\varphi(x,y,z)$، يسمى تدرج (*gradient*) الدالة السلميةφ ، ونرمز له $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$، الشعاع المعرف في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{\nabla}\varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

حيث يدعى $\vec{\nabla}$ مؤثر نابلا (*opérateur nabla*):

$$\vec{\nabla}\square = \frac{\partial\square}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\square}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\square}{\partial z}\vec{k}$$

1. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\alpha = \vec{0}$ $\left(\alpha = \text{ثابت}\right)$
2. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\alpha\varphi) = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ ، $\left(\alpha = \text{ثابت}\right)$
3. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\varphi_1\varphi_2\right) = \varphi_2\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1 + \varphi_1\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2$ ، حيث φ_1 و φ_2 تابعان سلميان.
4. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(\psi) = \left|\frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial\psi}\right|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi$ ، حيث φ وψ تابعان سلميان.
5. $d\varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi.d\vec{r}$ ، حيث $d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.

10.2 تفرق شعاع

تفرق (*divergence*) الشعاع $\vec{A}$ ، ويرمز له بـ : $\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$ [6] ، هو مقدار سلمي يساوي في الإحداثيات الديكارتية:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial \mathrm{z}}$$

حيث: $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$.

1. $\mathrm{div}\,\vec{C} = 0$، حيث $\vec{C}$ شعاع ثابت.
2. $\mathrm{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{div}\vec{B}$
3. $\mathrm{div}(\alpha\vec{A}) = \alpha\mathrm{div}\vec{A}$، حيث α ثابت.
4. $\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A}.\overrightarrow{grad}\varphi$، حيث φ تابع سلمي.

---

[6] تفرق شعاع $\vec{A}$ هو الجداء السلمي بين مؤثر نابلا و $\vec{A}$.

11.2 دوران شعاع

يحسب دوران (*rotationnel*) الشعاع $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ في جملة الإحداثيات الديكارتية، و نرمز له بـ: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ كالتالي:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

1. $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} + \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$
2. $\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha\vec{A}) = \alpha\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ ، حيث α ثابت.
3. $\overrightarrow{\text{rot}}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi) \times \vec{A}$ ، حيث φ تابع سلمي.
4. $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B} + \vec{A}\,\text{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\text{div}\,\vec{A}$

12.2 مؤثر لابلاسيان الدالة السلمية

نعرف لابلاسيان (*Laplacien*) الدالة السلمي $\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\varphi) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi) = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

يسمى Δ مؤثر لابلاسيان معرف بـ:

$$\nabla^2\square = \Delta\square = \frac{\partial^2\square}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\square}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\square}{\partial z^2}$$

تمرين 5:

ليكن في المعلم الديكارتي الاشعة:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

حيث: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

حساب: $\overrightarrow{\text{grad}}\,r$ و $\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r}$ و $\text{div}\,\vec{r}$ و $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{r}$ و $\nabla^2 r$.

الحل:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} \qquad (1)$$

حيث:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

نعوض قيمة المشتقات الجزئية في المعادلة (1) فنحصل على :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \frac{x}{r}\vec{\imath} + \frac{y}{r}\vec{\jmath} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) = \frac{-1}{2}2x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$
$$= -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$$

و منه:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = -\left(\frac{x}{r^3}\vec{\imath} + \frac{y}{r^3}\vec{\jmath} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right)$$
$$= -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div}\,\vec{r} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3$$

باستعمال تعريف دوران شعاع نحسب:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial \text{z}}{\partial y} - \frac{\partial \text{y}}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial \text{z}}{\partial x} - \frac{\partial \text{x}}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial \text{y}}{\partial x} - \frac{\partial \text{x}}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

بالنسبة الى $\nabla^2 r$:

$$\nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

نعوض المشتقات في المعادلة (2) فنحصل على:

$$\nabla^2 r = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

الفصل الثالث

حركيات النقطة المادية

الحركيات (*cinématique*) هي دراسة الحركة مستقلة عن مسبباتها (القوى). في هذا الفصل سنهتم بحركيات النقطة المادية أي دراسة معادلات الحركة والسرعة والتسارع كدوال بدلالة الزمن وايضا دراسة المسار، نستعمل في هذا الفصل مصطلح النقطة المادية الذي هو عبارة عن تجريد علمي من أجل تبسيط المسائل المدروسة، فعند إدخال هذا المفهوم نتخلى عن كافة خواص الجسم من أبعاد وشكل وتغيرات داخلية.

1.3 شعاع الموضع

لتحديد مكان تواجد الجسم أي موضعه، نعرف مقدارا يعطي الجهة التي يقع فيها الجسم والمسافة التي تفصله عن بداية الحساب، يدعى بشعاع الموضع (*vecteur position*). هندسيا يمثل شعاع الموضع بسهم من بداية القياس "O" إلى المكان المرغوب تحديد موضع النقطة المادية فيه M:

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$\vec{r}$ M O

2.3 مفهوم المسار وقانون الحركة

يبين شعاع الموضع المكان الذي تتواجد فيه النقطة المادية لكنه غير كاف للإجابة عن كيفية انتقال النقطة المادية إلى ذلك الموضع. لذلك، و لتحديد كافة النقاط التي تواجدت فيها النقطة المادية خلال حركتها، ندخل مفهوم مسار(*trajectoire*) حركة النقطة المادية، وتحديد معادلة المسار هي إحدى المسائل الهامة في الميكانيكا.

نستطيع تقسيم أنواع الحركات تبعا لشكل المسار: حركات مستقيمة (مسارها مستقيم)، حركات دائرية (مسارها دائري)، الخ.

قانون حركة (*équation du mouvement*) النقطة المادية M يعبر عنه رياضيا بإعطاء تبعية شعاع الموضع بالنسبة للزمن $\vec{r}=\vec{r}(\mathrm{t})$، لذلك من ضروري إرفاق الحركة بمعلم من أجل الوصف الدقيق. فهي تكافئ في المعلم الديكارتي ثلاث علاقات سلمية هي:

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

حيث:

$$\vec{r}=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}+z(t)\vec{k}$$

وتعطى معادلة مسار النقطة المادية باختزال الزمن t من علاقات قانون الحركة (يؤدي الزمن t دور الوسيط)، اي علاقات تربط بين الإحداثيات دون ظهور الزمن، فيمكن ان نحصل مثلا في المعلم الديكارتي على أحدى الجمل التالية:

$f(x,y)=0$ و $f'(x,z)=0$

$f(x,y)=0$ و $f'(y,z)=0$

$f(x,z)=0$ و $f'(y,z)=0$

تمرين1:

لتكن نقطة مادية معرفة بشعاع الموضع في المعلم الديكارتي التالي:

$$\vec{r}=at\vec{\imath}+bt^2\vec{\jmath}$$

من شعاع الموضع نجد قانون الحركة :

$$x(t)=at$$
$$y(t)=bt^2$$

للحصول على معادلة المسار نحاول إيجاد علاقة بين الإحداثيات والتخلص من الزمن:

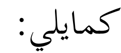
$$t=\frac{x}{a}\Longrightarrow \qquad y=\frac{b}{a^2}x^2$$

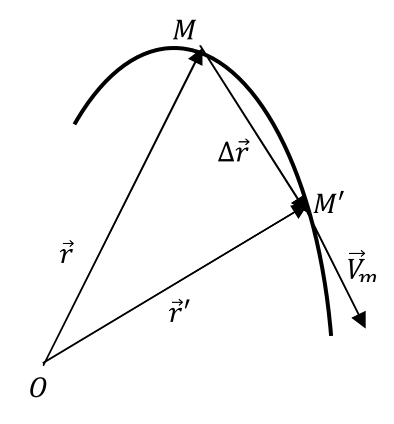
وهي معادلة قطع مكافئ.

3.3 شعاع سرعة النقطة المادية

قد تملك حركتان مختلفتان المسار نفسه، لوصف التباين بينهما ندخل مفهوم شعاع سرعة النقطة المادية. (*vecteur vitesse*) ليكن الموضعين M و M' لنقطة مادية ما الممثلتان بأشعة الموضع التالية: $\vec{r}=\vec{r}(t)$ و $\overrightarrow{r'}=\vec{r}(t+\Delta t)$ على الترتيب.

نعرف شعاع الانتقال $\Delta\vec{r}$ للنقطة المادية خلال الفاصل الزمني Δt


كمايلي:



$$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{r'}-\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

نسمي النسبة بين شعاع الانتقال والفاصل الزمني بالسرعة المتوسطة(*vitesse moyenne*)، و يرمز لها بـ $\vec{V}_{\mathrm{m}}$:

$$\vec{V}_m=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

نجد أن الشعاع $\vec{V}_{\mathrm{m}}$ محمول على شعاع الانتقال $\Delta\vec{r}$ أي موازٍ له.

نعرف أيضا ما يسمى بالسرعة الآنية أو اللحظية (*vitesse instantanée*) للنقطة المادية كنهاية لسرعتها المتوسطة عندما يتناهى $\Delta \mathrm{t}$ إلى 0، و يرمز لها بـ $\vec{V}$:

$$\vec{V}=\lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}$$

فشعاع السرعة الآنية للنقطة المادية مساو للمشتق الأول لشعاع الموضع بالنسبة للزمن، و محمول على مماس المسار ومتجه نحو الحركة.

نشير إلى أن معرفة السرعة الآنية تمكننا من إيجاد قانون الحركة وذلك بواسطة عملية التكامل:

$$\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}\Longrightarrow d\vec{r}=\vec{V}(t)dt\Longrightarrow\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)}d\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\vec{V}(t)dt$$

حيث $\vec{r}(t_0)$ شعاع الموضع الابتدائي عند اللحظة الابتدائية t_0. سنطلق مصطلح شعاع السرعة بدلا من شعاع السرعة الآنية لمجرد الاختصار.

4.3 شعاع تسارع النقطة المادية

توصف سرعة تغيرات شعاع السرعة بشعاع التسارع (*vecteur accélération*)، يرمز له غالبا بالرمز $\vec{\gamma}$، فإذا كانت سرعة النقطة المادية $\vec{V}(t_1)=\vec{V}_1$ و $\vec{V}(t_2)=\vec{V}_2$ عند المواضع $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ على الترتيب. فعبارة شعاع التسارع المتوسط (*moyenne*) خلال الفاصل الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{\gamma}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\vec{\mathrm{V}}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$

نعرف شعاع التسارع اللحظي (*instantanée*) كنهاية للتسارع المتوسط عندما $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\gamma}_m = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

نستعمل مصطلح شعاع التسارع بدلا من شعاع تسارع اللحظي لمجرد الاختصار، فشعاع تسارع النقطة المادية في لحظة زمنية يساوي المشتق الأول لشعاع السرعة، أو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن. يتجه شعاع التسارع نحو تقعر المسار.

5.3 حركة النقطة المادية في الجملة الديكارتية

يعطى قانون حركة للنقطة المادية M في المعلم الديكارتي بالإحداثيات الديكارتية (*coordonnées cartésiennes*) $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$

حيث يكتب شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

شعاع السرعة و طويلته:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$
$$|\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

شعاع التسارع و طويلته:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$
$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2}$$

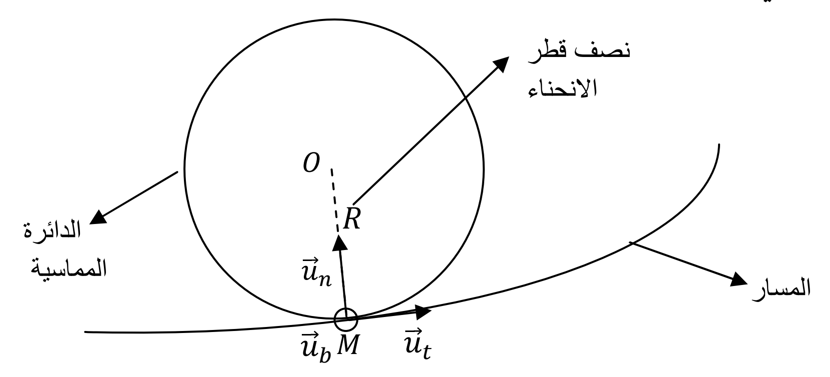
6.3 حركة النقطة المادية في المعلم الأصلي أو الذاتي

نستطيع التعبير عن سرعة حركة نقطة مادية وتسارع في معلم يدعى المعلم الذاتي $\left(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_b\right)$ (*coordonnées intrinsèques*)، حيث:

$\vec{u}_t$: شعاع وحدة مماسي للمسار عند النقطة M، وموجه في نفس اتجاه الحركة.

$\vec{u}_n$: شعاع الوحدة الناظمي على المسار، والمحمول على قطر انحناء لدائرة المماسية R (*cercle osculateur*) عند النقطة M ، والعمودي على $\vec{u}_t$.

$\vec{u}_b$: معرف كما يلي $\vec{u}_b = \vec{u}_t \times \vec{u}_n$.



نعرف الفاصلة المنحنية (*abscisse curviligne*) s التي تمثل طول القوس أو المسار المقطوع المحققة للعلاقة التالية :

$$ds = Rd\theta$$

حيث ds عنصر تفاضل من طول القوس و $d\theta$ عنصر تفاضل من الزاوية كما هو موضح في الشكل.

فإنه من الممكن كتابة شعاع السرعة الآنية عند M :

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\vec{u}_t = \left|\vec{V}\right|\vec{u}_t$$

و شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{u}_t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

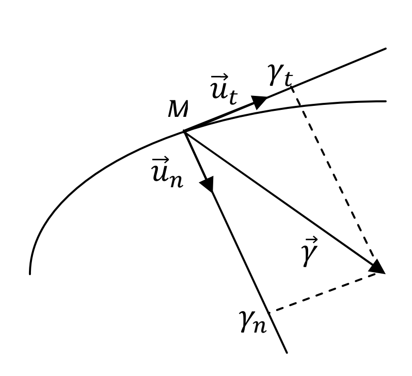
نظرية: *مشتق شعاع وحدة بالنسبة إلى زاوية يعطي شعاع الوحدة العمودي عليه مباشرة.*

باستعمال هذه النظرية نجد:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_n; \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{R} \Longrightarrow \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{V^2}{R}\vec{u}_n$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_t + \frac{V^2}{R}\vec{u}_n$$

يمكننا تحليل شعاع التسارع إلى مركبتين، مركبة مماسيه موازية لـ $\vec{u}_t$ تدعى التسارع المماسي (*tangentielle*) ومركبة أخرى موازية للشعاع الوحدة $\vec{u}_n$ الناظمي على المسار والعمودي على $\vec{u}_t$ وتسمى التسارع الناظمي (*normale*):



$$\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{u}_t + \gamma_n\vec{u}_n$$

γ_t و γ_n المركبتان الأصليتان أو الذاتية للتسارع، ولكل منها معنى فيزيائي دقيق:

- $\frac{dV}{dt} = \gamma_t$ ترتبط بتغير مقدار السرعة.
- $\frac{V^2}{R} = \gamma_n$ ترتبط بتغير اتجاه السرعة.

تمرين2:

تعطى إحداثيات النقطة M في المعلم الديكارتي بالمعادلات:

$$x = \alpha\left(\frac{t^3}{3} + t\right); \ y = \alpha\left(\frac{t^3}{3} - t\right); \ z = \alpha t^2$$

α عدد موجب ثابت. أوجد:

1. شعاع السرعة $\vec{V}$ و طويلتها، والزاوية المحصورة بين $\vec{V}$ والمحور ox.
2. التسارع $\vec{\gamma}$ و طويلته، والمركبة الناظمية و المماسية للتسارع ، ونصف قطر الانحناء عند t.

الحل:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = \alpha\left(\frac{t^3}{3} + t\right) \\ y = \alpha\left(\frac{t^3}{3} - t\right) \\ z = \alpha t^2 \end{cases}$$

.1

$$\vec{V}=\begin{cases}v_x=\alpha(t^2+1)\\ v_y=\alpha(t^2-1)\\ v_z=2\alpha t\end{cases},\ |\vec{V}|=\alpha\sqrt{(t^2+1)^2+(t^2-1)^2+4t^2}$$

$$=\alpha\sqrt{2}(\mathrm{t}^2+1)$$

الزاوية المحصورة بين $\vec{V}$ و ox

$$cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{\iota}}\right)=\frac{\vec{V}\cdot\vec{\iota}}{|\vec{V}||\vec{\iota}|}=\frac{\alpha(t^2+1)}{\alpha\sqrt{2}(t^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow\left(\widehat{\vec{V},\vec{\iota}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

.2

$$\vec{\gamma}=\begin{cases}\gamma_x=2\alpha t\\ \gamma_y=2\alpha t\\ \gamma_z=2\alpha\end{cases};\quad |\vec{\gamma}|=2\alpha\sqrt{2t^2+1}$$

$$\gamma_t=\frac{d|\vec{V}|}{dt}=2\sqrt{2}\alpha t$$

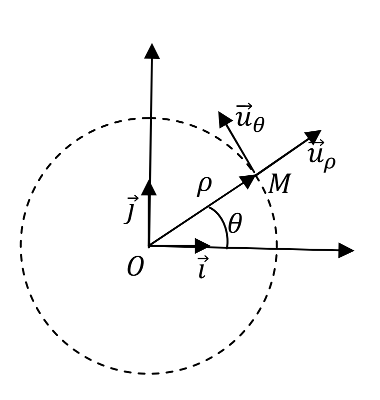
$$\gamma^2={\gamma_t}^2+{\gamma_n}^2\Longrightarrow{\gamma_n}^2=\gamma^2-{\gamma_t}^2=8\alpha^2t^2+4\alpha^2-8\alpha^2t^2=4\alpha^2$$

$$\Longrightarrow\gamma_n=2\alpha$$

نصف قطر الانحناء:

$$R=\frac{V^2}{\gamma_n}=\frac{2\alpha^2(\mathrm{t}^2+1)^2}{2\alpha}$$

7.3 حركة النقطة المادية في المعلم القطبي



تحدد حركة النقطة المادية M في المعلم القطبي $(M,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ بالإحداثيات القطبية (*coordonnées polaires*):

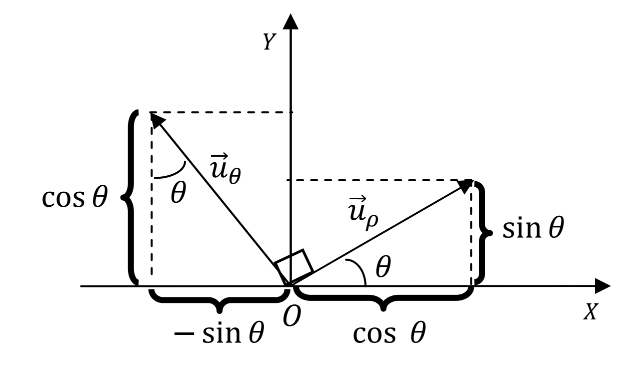
$\rho(t)$: طول شعاع الموضع يدعى نصف القطر القطبي (*rayon polaire*).

$\theta(t)$: الزاوية القطبية (*angle polaire*) المحصورة بين المحور Ox وشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$.

نعرف أشعة الوحدة $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ للمعلم القطبي الذي مبدأه النقطة M كما هو موضح في الشكل حيث:

شعاع الوحدة $\vec{u}_\rho$: مواز لشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ في النقطة M.

شعاع الوحدة $\vec{u}_\theta$: مماسي للدائرة التى نصف قطرها ρ ومركزها O في النقطة M.



بإسقاط الأشعة $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ في المعلم الديكارتي كما هو موضح في الرسم، نجد:

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}$$

وأشعة المعلم الديكارتي بدلالة أشعة المعلم القطبي:

$$\vec{\imath} = \cos\theta\, \vec{u}_\rho - \sin\theta\, \vec{u}_\theta$$
$$\vec{\jmath} = \sin\theta\, \vec{u}_\rho + \cos\theta\, \vec{u}_\theta$$

يعطى شعاع الموضع والسرعة في المعلم القطبي بالعلاقات التالية:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho; \qquad \left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$$
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

حساب مشتقات أشعة الوحدة للمعلم القطبي:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\, \vec{\imath} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\, \vec{\jmath} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\, \vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\, \vec{\jmath} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

ومنه يحسب شعاع السرعة من العلاقة التالية:

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta; \qquad \left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2}$$

و شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\left(\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$
$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$
$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^2}$$

علاقات التحويل بين الإحداثيات الديكارتية و القطبية:

بمقارنة صيغة شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية نجد:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_r = \rho\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

تمرين3:

تعطى في جملة الإحداثيات القطبية (ρ, θ) المرفقة بأشعة الوحدة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ إحداثيات النقطة المادية M :

$$\rho = 2ae^{\theta} \text{ و } \theta = \omega t$$

حيث: a و ω ثابتان موجبان و t يمثل الزمن. أوجد:

1. شعاع السرعة $\vec{V}$ والتسارع $\vec{\gamma}$ في جملة الإحداثيات القطبية، واستنتج طويلتيهما.
2. المركبتين المماسية γ_t و الناظمية γ_n لشعاع التسارع ، ثم استنتج عبارة نصف قطر الانحناء R .
3. طول المسار L في اللحظة t علما ان في اللحظة الابتدائية $L(t = 0) = 0$.

الحل:

شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho = 2ae^{\omega t}\vec{u}_\rho$$

1- شعاع السرعة والتسارع:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 2a\omega e^{\omega t}\left(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right)$$
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta = 4a\omega^2 e^{\omega t}\vec{u}_\theta$$
$$\left|\vec{V}\right| = 2\sqrt{2}a\omega e^{\omega t} \quad , \qquad \left|\vec{\gamma}\right| = 4a\omega^2 e^{\omega t}$$

2- المركبتين المماسية γ_t و الناظمية γ_n:

$$\gamma_t = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = 2\sqrt{2}a\omega^2 e^{\omega t},\ \gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - {\gamma^2}_t} = 2\sqrt{2}a\omega^2 e^{\omega t},$$

$$R = \frac{V^2}{\gamma_n} = 2\sqrt{2}ae^{\omega t}$$

3-طول المسار L :

$$ds = Vdt = 2\sqrt{2}awe^{wt}dt \rightarrow L = \int_0^L ds = 2\sqrt{2}a\omega \int_0^t e^{\omega t}dt$$
$$= 2\sqrt{2}a(e^{\omega t} - 1)$$

تمرين4:

تعطى معادلة مسار النقطة المادية في الإحداثيات القطبية بالعبارة: $\rho = 2h\sin\theta$ حيث $\theta = \omega t$.

حيث h و ω ثابتان موجبان، أوجد:

1-معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية .

2-عبارات أشعة الموضع، السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية.

3-عبارتي التسارعين المماسي γ_t والناظمي γ_n ثم استنتج نصف قطر الانحناء R.

4-بين أن الحركة ذات تسارع مركزي؟ (بدون حساب).

الحل:

1. معادلة المسار:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = 2h\sin\theta\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = 2h\sin^2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h\sin 2\theta \\ y - h = h\cos 2\theta \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-h)^2 = h^2$$

المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها h و مركزها $(0, h)$.

2. شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho = 2h\sin\omega t\vec{u}_\rho$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2h\omega\cos\omega t\,\vec{u}_\rho + 2h\omega\sin\omega t\vec{u}_\theta$$
$$= 2h\omega\left(\cos\omega t\,\vec{u}_\rho + \sin\omega t\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 4h\omega^2\left(-\sin\omega t\,\vec{u}_\rho + \cos\omega t\,\vec{u}_\theta\right)$$

3. عبارتي γ_t و γ_N ، واستنتاج R:

$$|\vec{V}| = 2h\omega \ , \qquad |\vec{\gamma}| = 4h\omega^2$$

$$\gamma_t = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = 0\ , \qquad \gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - {\gamma_t}^2} = \gamma = 4h\omega^2,$$

$$R = \frac{V^2}{\gamma_n} = h$$

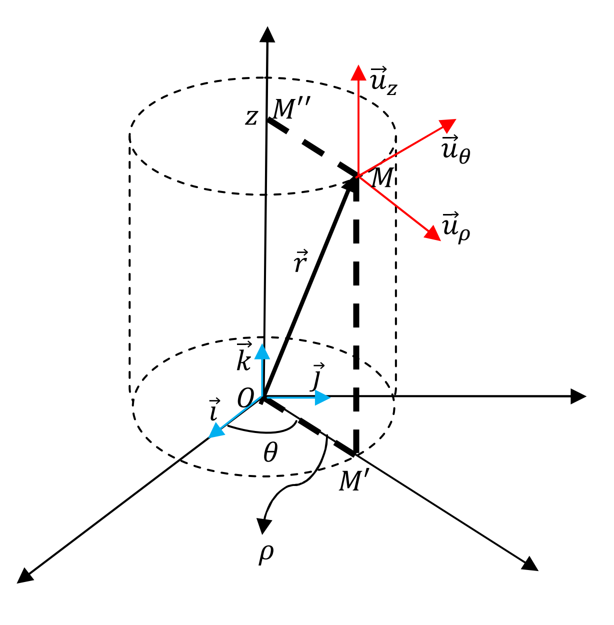
4. بما أن المسار الدائري $\gamma_t = 0 \Longleftarrow$ الحركة ذات تسارع مركزي.

8.3 حركة النقطة المادية في المعلم الاسطواني

إن الإحداثيات القطبية هي حالة خاصة للإحداثيات الاسطوانية (*coordonnées cylindriques*) عندما تكون الحركة في مستو أي $z = 0$. عند الحركة في الفضاء يحدد شعاع الموضع في المعلم الأسطواني



$(M,\ \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ بالإحداثيات: $\rho(t)$ و $\theta(t)$ و $z(t)$ حيث:



$\rho(t)$: طول المقطع OM'.

$\theta(t)$: الزاوية القطبية المحصورة بين المحور OX و المستقيم OM'.

$z(t)$: هي مسقط شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ على المحور OZ.

نعرف أشعة الوحدة المرفقة بالمعلم الأسطواني مبدأه M:

شعاع الوحدة $\vec{u}_\rho$: مواز لشعاع $\overrightarrow{OM'}$.

شعاع الوحدة $\vec{u}_\theta$: مماسي للدائرة التي نصف قطرها ρ ومركزها M'' عند النقطة M.

شعاع الوحدة $\vec{u}_z$: موازي لشعاع الوحدة $\vec{k}$.

إسقاط أشعة الوحدة للمعلم الأسطواني في المعلم الديكارتي يعطي:

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

يكتب شعاع الموضع للنقطة المادية M في المعلم الاسطواني كما يلي:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z \quad , \qquad \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

و شعاع السرعة و التسارع:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad , \qquad \left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \quad ,$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

علاقات التحويل بين الإحداثيات الديكارتية و الاسطوانية:

بمقارنة صيغة شعاع الموضع في الإحداثيات الاسطوانية والإحداثيات الديكارتية نجد:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

تمرين 5:

تعطى في المعلم الاسطواني حركة النقطة المادية M كما يلي:

$$\theta = ct^2 \quad ، \qquad \overrightarrow{OM} = a\vec{u}_\rho + bt\vec{u}_z$$

حيث a و b و c ثوابت موجبة.

1. أحسب السرعة و التسارع .
2. أحسب نصف قطر الانحناء.

الحل:

1. حساب شعاع السرعة والتسارع:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{u}_z = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{u}_z$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho = 2ac\vec{u}_\theta - 4ac^2t^2\vec{u}_\rho$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{16a^2c^4t^4 + 4a^2c^2} = 2ac\sqrt{4c^2t^4 + 1}$$

2. نصف قطر الانحناء:

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = \frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}} \quad ;$$

$$\gamma_n = (\gamma^2 - {\gamma_t}^2)^{1/2} = \frac{2ac(16a^2c^4t^6 + 4b^2c^2t^4 + b^2)^{1/2}}{(4a^2c^2t^2 + b^2)^{1/2}}$$

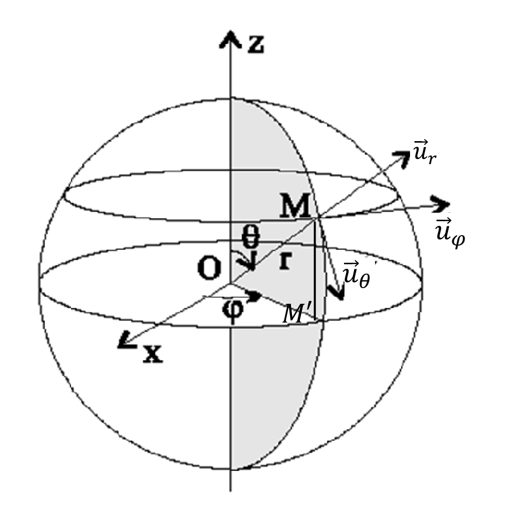
$$R = \frac{(4a^2c^2t^2 + b^2)^{3/2}}{2ac(16a^2c^4t^6 + 4b^2c^2t^4 + b^2)^{1/2}}$$

9.3 حركة النقطة المادية في المعلم الكروي

يحدد موضع النقطة المادية M في المعلم الكروي $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ بالإحداثيات الكروية (*coordonnées sphériques*): $r(t)$ و $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ حيث:

$r(t)$: نصف القطر القطبي وهو عبارة عن طويلة شعاع الموضع $|\overrightarrow{OM}|$.

$\theta(t)$: الزاوية القطبية المحصورة بين $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ و OZ.



$\varphi(t)$: الزاوية المحصورة بين OX و $0M'$ حيث M' مسقط النقطة M في المستوي XOY تسمى زاوية تمام العرض (*coaltitude*).

نعرف أشعة الوحدة المرفقة بالمعلم الكروي كما هو موضح في الرسم حيث:

شعاع الوحدة $\vec{u}_r$: في اتجاه تزايد نصف القطر.

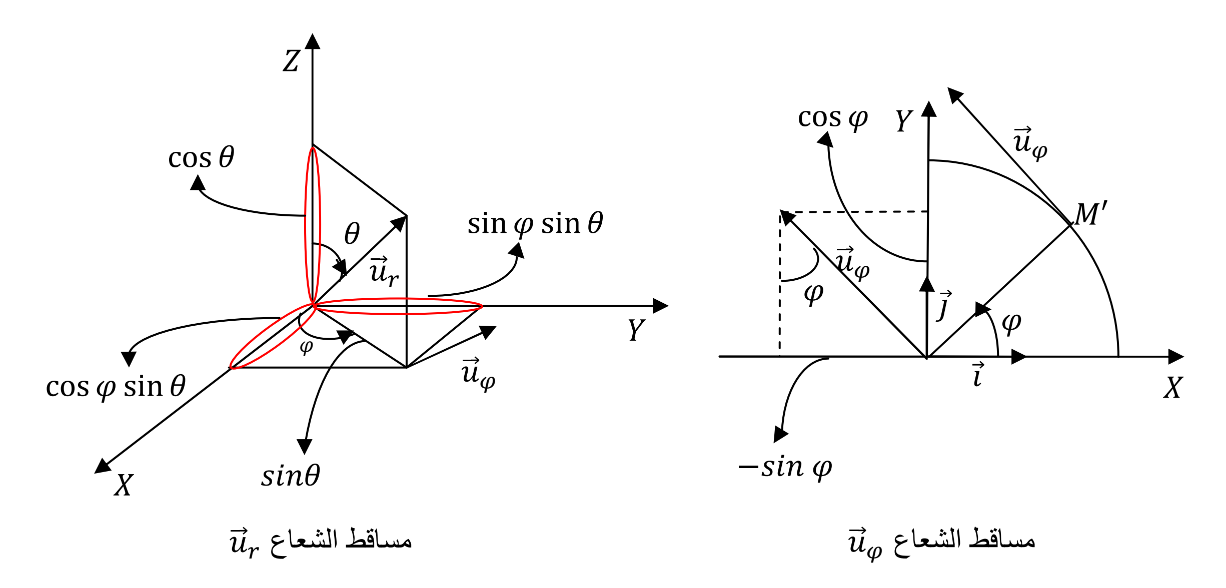
شعاع الوحدة $\vec{u}_\varphi$: مماسي للدائرة العرضية التي تشمل النقطة M ونصف قطرها $0M'$ و ليس له مسقط على المحور $0Z$.

شعاع الوحدة $\vec{u}_\theta$: مماسي للدائرة الطولية التي تشمل النقطة M ونصف قطرها r.

ملاحظة: كي نحصل على جميع نقاط الفضاء فان:

$$o \le \theta \le \pi\,, \quad o \le \varphi \le 2\pi\,, \quad o \le r < \infty$$

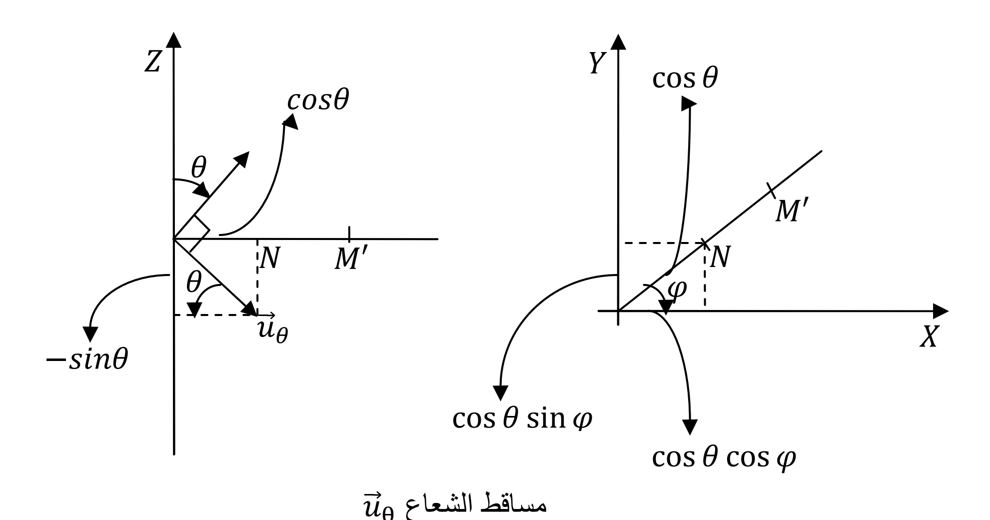
للبحث على مركبات أشعة الوحدة نقوم بإسقاطها على المعلم الديكارتي:



مساقط الشعاع $\vec{u}_r$ — مساقط الشعاع $\vec{u}_\varphi$

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

بالنسبة الى مساقط شعاع الوحدة $\vec{u}_\theta$:



مساقط الشعاع $\vec{u}_\theta$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}$$

و العلاقات العكسية:

$$\vec{i} = \sin\theta\cos\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{u}_\theta - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$$
$$\vec{j} = \sin\theta\sin\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u}_\theta + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$$
$$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

نبحث عن مشتقات أشعة الوحدة بالنسبة إلى الزمن $\dot{\vec{u}}_r$، $\dot{\vec{u}}_\varphi$ و $\dot{\vec{u}}_\theta$ بدلالة $\vec{u}_r$، $\vec{u}_\varphi$ و $\vec{u}_\theta$:

$$\dot{\vec{u}}_r = [\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi]\vec{\imath} + [\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta cos\varphi]\vec{\jmath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k}$$
$$= \dot{\theta}[\cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} - \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}] + \dot{\varphi}\sin\theta[-\sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}]$$
$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_\theta = [-\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi]\vec{\imath} + [-\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\theta cos\varphi]\vec{\jmath} - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{k}$$
$$= -\dot{\theta}[\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \sin\theta\,\vec{k}] + \dot{\varphi}\cos\theta[-\sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}]$$
$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{u}_\varphi$$

بالنسبة الى مشتق شعاع الوحدة $\vec{u}_\varphi$:

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}[\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}]$$

نستعمل في هذه الحالة المعادلات العكسية، أي نعوض قيمة كل من $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ المكتوبة بدلالة $\vec{u}_r$، $\vec{u}_\varphi$ و $\vec{u}_\theta$:

$$\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} = \sin\theta\cos^2\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\cos^2\varphi\,\vec{u}_\theta - \cos\varphi\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi\vec{u}_r + \cos\theta\sin^2\varphi\vec{u}_\theta + \sin\varphi\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$$
$$= \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta$$

ونحصل في الاخير على العلاقة التالية:

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}[\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta]$$

أشعة الموضع و السرعة و التسارع في الإحداثيات الكروية تعطى:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$
$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$
$$|\vec{V}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}$$
$$\vec{\gamma} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)]\vec{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)\vec{u}_\varphi$$

علاقات التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والكروية:

بمقارنة صيغة شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية والإحداثيات الديكارتية نجد:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = r\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \theta = arc\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

تمرين 6:

تتحرك نقطة مادية على سطح كرة نصف قطرها R وفق القانون التالي:

$$\theta = 30° \text{ و } \varphi(t) = at^2$$

حيث a ثابت. أحسب:

1. شعاع السرعة و التسارع للنقطة المادية.
2. مسار وطبيعة الحركة.

الحل:

.1

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = R\vec{u}_r; \qquad r = R$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi = 2Rat\sin 30\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{V} = Rat\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = Ra\vec{u}_\varphi + Rat\dot{\vec{u}}_\varphi$$

$$= Ra\vec{u}_\varphi - 2Ra^2t^2(\sin 30\,\vec{u}_r + \cos 30\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{\gamma} = -Ra^2t^2\vec{u}_r - \sqrt{3}Ra^2t^2\vec{u}_\theta + Ra\vec{u}_\varphi$$

.2

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{R}{2}\cos at^2 \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{R}{2}\sin at^2 \\ z = R\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{4} \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$$

فالمسار إذا دائرة نصف قطرها $R/_2$ تتم على المستوي $z = \frac{\sqrt{3}}{2}R$، ولما ان $\varphi = at^2$ فان الحركة متسارعة بانتظام $\ddot{\varphi} = 2a$.

10.3 بعض الحركات البسيطة

الحركة المستقيمة (***mouvement rectiligne***)**:** تتم حركة النقطة المادية المستقيمة وفق مسار مستقيم، وليكن المحور OX مثلا، عندها يكفي لتعيين موضع النقطة المادية إعطاء إحداثيتها على هذا المحور كتابع للزمن، أي:

$$x = x(t)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath},\ \ \vec{V} = \dot{x}\vec{\imath},\ \ \vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{\imath}$$

تتعلق طبيعة الحركة (متسارعة أومتباطئة) بإشارة الجداء:

$$\vec{V}\cdot\vec{\gamma} = V\,\gamma_t$$

إذ كان موجبا فالحركة متسارعة وإذا كان سالبا فهي متباطئة.

✓ يمكن أيضا معرفة V بإعطاء γ ومعرفة x بإعطاء V:

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(t)dt + V_0, \quad x(t) = \int_{t_0}^{t} V(t)dt + x_0$$

حيث $V(t_0) = V_0$ و $x(t_0) = x_0$ السرعة و الاحداثية في اللحظة الابتدائية $t = t_0$ (شروط ابتدائية).

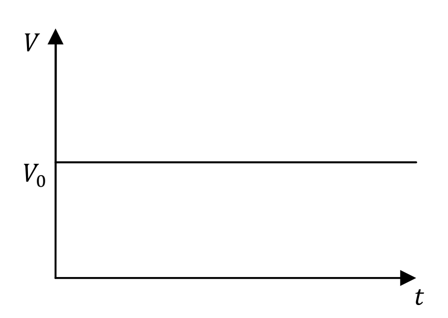
✓ يمكن بدلا من إيجاد العلاقة بين x و t نجد العلاقة بين x و V:

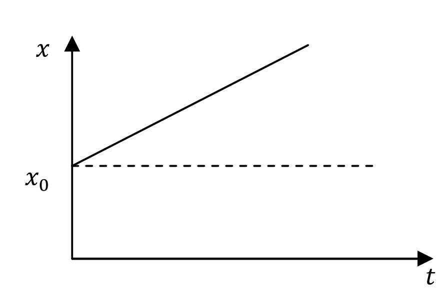
$$dV = \gamma dt \rightarrow \frac{dx}{dt} dV = \gamma dt \frac{dx}{dt} \rightarrow VdV = \gamma dx$$

بالمكاملة نجد:

$$\int_{t_0}^{t} VdV = \int_{x_0}^{x} \gamma dx \rightarrow (V^2 - V_0^2) = 2\int_{x_0}^{x} \gamma(x)dx \qquad (1)$$

✓ في حالة $\gamma = 0$ تدعى الحركة بالمستقيمة المنتظمة (*rectiligne uniforme*) فيكون عندها:





$$V = V_0 = const, \qquad x = V_0 t + x_0$$

✓ في حالة $\gamma =$ ثابت تدعى الحركة بالمستقيمة المتغيرة بانتظام (*rectiligne uniformément varié*):

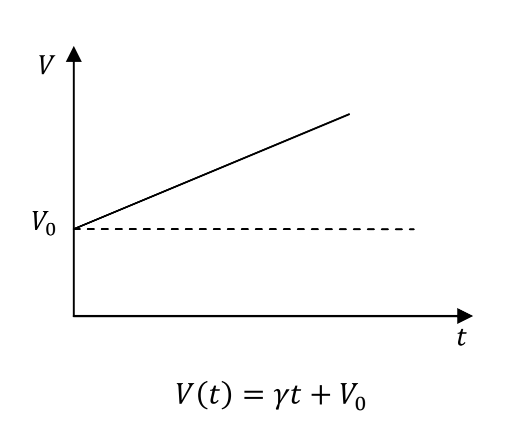
$$V(t) = \gamma(t - t_0) + V_0 \qquad (2)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma(t^2 - {t_0}^2) + V_0(t - t_0) + x_0 \qquad (3)$$

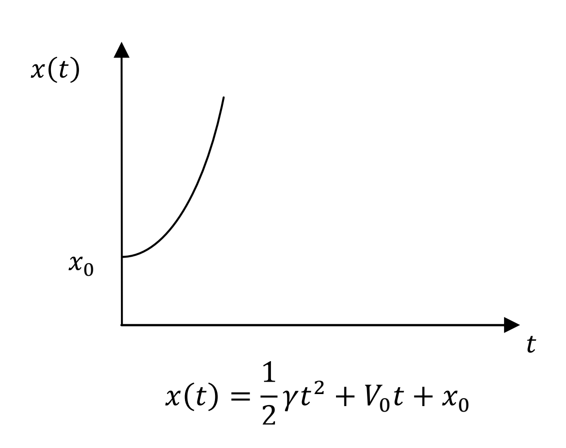
من المعادلة (1) نجد:

$$(V^2 - V_0^2) = 2\int_{x_0}^{x} \gamma(x)dx = 2\gamma(x - x_0) \rightarrow V^2 - V_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$$

عند $t_0 = 0$ تصبح المعادلات (2) و (3):



$V(t) = \gamma t + V_0$



$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0$

الحركة الدائرية المنتظمة (***mouvement circulaire uniforme***): تتم هذه الحركة وفق مسار دائري او قوس بسرعة طويلتها ثابتة (منتظمة).

ملاحظة: إذا كانت طويلة السرعة ثابتة لا يعني بالضرورة أن التسارع معدوم لأن التسارع هو مشتق شعاع السرعة (شعاع السرعة عبارة عن طويلة واتجاه)، لذلك حتى ولو غيرت شعاع السرعة في الاتجاه فقط يكون هناك تسارع.

لتحديد موضع المتحرك M في لحظة ما يمكن ان نستعمل من الشكل :

- ✓ الفاصلة المنحنية طول القوس $s(t) = \widehat{AB}$.
- ✓ او استعمال الزاوية $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$. المعادلة $\theta(t)$ هي المعادلة الزمنية للحركة

ترتبط الإحداثيات المنحنية والزاوية بالعلاقة التالية:

$$s(t) = R\theta(t)$$

تعطى الزاوية $\theta(t)$ بالراديان.

نعرف السرعة الخطية V والسرعة الزاوية $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ حيث:

$$\vec{V} = V\vec{u}_t \rightarrow V = \frac{ds}{dt} = R\dot{\theta}$$

Y

B

R

θ

A

X

بما ان الحركة منتظمة اي V ثابتة يؤدي الى ان:

$$\dot{\theta} = \omega = \text{ثابت} \rightarrow V = R\omega$$

ندخل الدور T وهو المجال الزمني الذي يستغرقه المتحرك لإنجاز دورة:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = R\ddot{\theta} = 0; \qquad \gamma_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

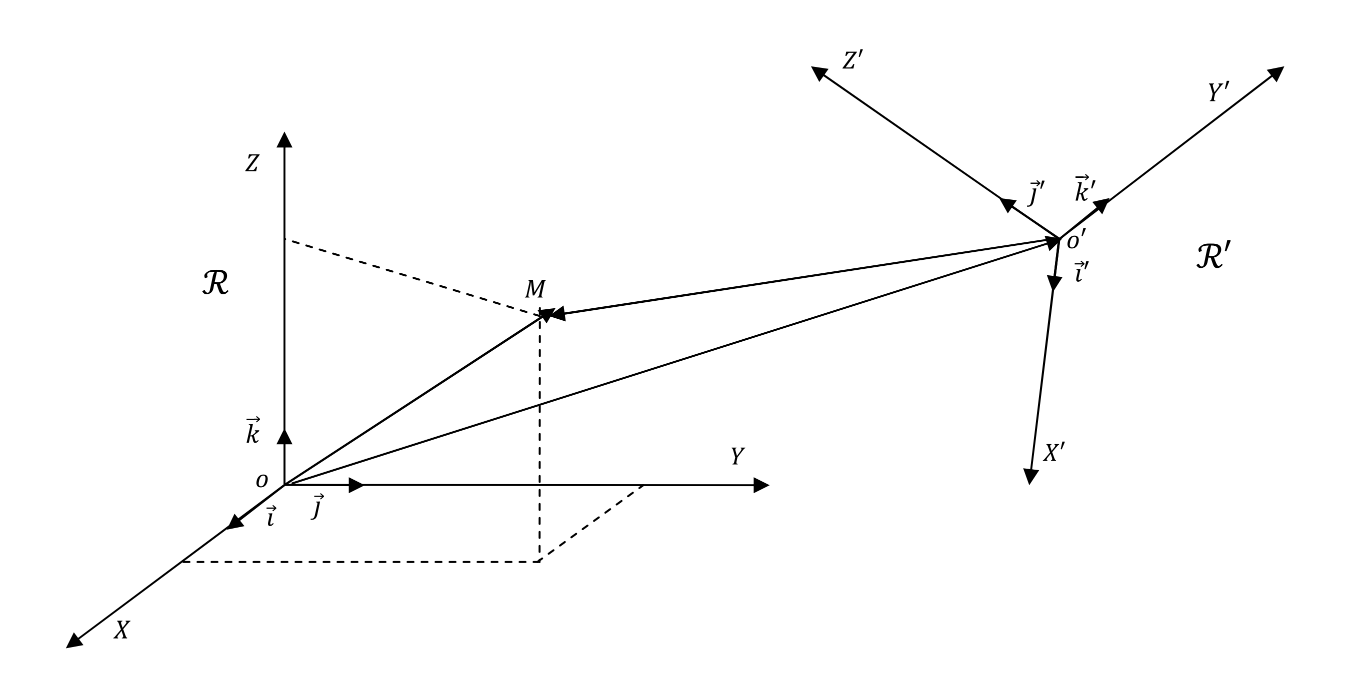
11.3 الحركة النسبية

لكي نتحدث عن الحركة النسبية (*mouvement relatif*) فعلينا أولا أن نعرف كيف يتحرك أو ينتقل الجسم في الفراغ؟. فإذا قلنا أن جسما ما انتقل فان هذا يعنى فقط انه غير موضعه بالنسبة إلى أجسام أخرى. وإذا راقبنا حركة هذا الجسم من عدة أماكن تتحرك بعضها بالنسبة لبعض، فان

حركته ستأخذ مفهوم نسبي وستبدو لنا بأشكال مختلفة تماما ومثال على ذلك: الحجر المرمى من طائرة وهي تطير، بالنسبة للطائرة سيسقط الحجر في خط مستقيم، أما بالنسبة لمشاهد على سطح الأرض فان الحجر سيرسم منحنى يعرف بالقطع المكافئ. سنهتم في هذا الجزء بمعرفة القوانين المنظمة للحركة، والقوانين التي تجبر الجسم على أن يتحرك بهذا الشكل بالذات وليس بشكل أخر.

من الضروري أن نعرف أن أي حركة للجسم يجب أن ترفق بجملة إسناد أو بما يسمى بالمعلم، حيث لا يمكن تأكيد الحركة دونها. بما أننا اعتبرنا أن حركة الجسم ذات مفهوم نسبي، لا تفهم إلا من خلال مرجع أخر يتحرك بالنسبة إليه، يقودنا هذا أيضا إلى مفهوم السكون فهو كما الحركة أمران نسبيان يرتبطان بجملة الإسناد.

سندرس حركة نقطة مادية M بالنسبة لمعلم متحرك$O'X'Y'Z'$ ، نرمز له بـ $\mathcal{R}'$ وحركة هذا المعلم تقاس بالنسبة إلى معلم ساكن $OXYZ$، نرمز له بـ $\mathcal{R}$، تدعى حركة M بالنسبة الى $\mathcal{R}$ بالحركة المطلقة (المعلم المطلق *repère absolu*) و بالنسبة الى $(\mathcal{R}')$ بالحركة النسبية (المعلم النسبي *repère relatif*) وتسمى حركة O' بالنسبة الى $\mathcal{R}$ بالحركة المكتسبة (*entrainement*).



شعاع الدوران: شعاع الدوران (*vecteur rotation*) المعلم $\mathcal{R}'$ بالنسبة إلى $\mathcal{R}$، نرمز له ب $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$، هو شعاع موجه نحو محور دوران المعلم $\mathcal{R}'$ بالنسبة إلى $\mathcal{R}$ ، ومركبته تساوي السرعة الزاوية لدوران المعلم $\mathcal{R}'$ بالنسبة إلى $\mathcal{R}$، ويحقق:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\imath}'}{\mathrm{dt}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{\imath}', \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}'}{\mathrm{dt}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{\jmath}', \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{dt}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{k}'$$

حساب سرعة M بالنسبة إلى ($\mathcal{R}$) (السرعة المطلقة $\vec{V}_a$ *vitesse absolue*):

المعلم $\mathcal{R}'$ في حركة انسحابيه و دورانية بسرعة زاوية $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ بالنسبة إلى $\mathcal{R}$ فيكون لدينا:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

حيث:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$
$$\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k}$$

يمكن إيجاد السرعة المطلقة $\vec{V}_a$ بطريقتين:

الطريقة المباشرة: اشتقاق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن في المعلم $\mathcal{R}$:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \qquad (1)$$

الطريقة غير المباشرة: اشتقاق $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ بالنسبة للزمن في المعلم $\mathcal{R}$، وتدعى طريقة تركيب السرعات (*composition des vitesses*)،

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

حيث:

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \dot{x}_{O'}\vec{\imath} + \dot{y}_{O'}\vec{\jmath} + \dot{z}_{O'}\vec{k}$$
$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right)$$
$$= \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times x'\vec{i}'+\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times y'\vec{j}'+\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times z'\vec{k}'$$
$$=\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times\overrightarrow{O'M}$$

ومنه:

$$\vec{V}_a=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'+\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times\overrightarrow{O'M}$$

السرعة المطلقة هي تركيب لسرعتين:

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e \qquad (2)$$

تدعى $\vec{V}_r$ السرعة النسبية (*vitesse relative*) للنقطة M محسوبة في المعلم $\mathcal{R}'$ وتعطى:

$$\vec{V}_r=\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}=\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'$$

و $\vec{V}_e$ سرعة الجر أو السرعة المكتسبة (*vitesse d'entrainement*) وتعطى بـ:

$$\vec{V}_e=\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}+\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\times\overrightarrow{O'M}$$

ملاحظة: السرعة النسبية تعطى في المعلم $\mathcal{R}'$ ، اما بالنسبة الى السرعة المكتسبة فطرفها الاول يكتب في المعلم $\mathcal{R}$ و الطرف الثاني يعطى في المعلم $\mathcal{R}'$. اذا اردنا الحصول على السرعة المطلقة في اي من المعلمين فيجب ان تكتب السرعة النسبية و المكتسبة في المعلم المراد حساب السرعة المطلقة فيه.

حساب تسارع M بالنسبة إلى $\mathcal{R}$ (التسارع المطلق $\vec{\gamma}_a$ *accélération absolue*):

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب التسارع المطلق $\vec{\gamma}_a$ بطريقتين:

الطريقة المباشرة: اشتاق شعاع السرعة المطلقة بالنسبة الى الزمن من العلاقة (1):

$$\vec{\gamma}_a=\frac{d\vec{V}_a}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

الطريقة غير المباشرة: اشتقاق الشعاع $\vec{V}_r+\vec{V}_e$ بالنسبة للزمن من العلاقة (2):

$$\vec{\gamma}_a=\frac{d\vec{V}_r}{dt}+\frac{d\vec{V}_e}{dt}$$

لدينا:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'\right)$$
$$= \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \dot{x}'\vec{\imath}' + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \dot{y}'\vec{\jmath}' + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \dot{z}'\vec{k}'$$
$$= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{V}_r$$

ومنه:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{V}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{V}_r$$

ونتبع الطريقة نفسها:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$
$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M}$$

باستعمال العلاقة التالية:

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}$$

نجد:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\vec{V}_r + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$

نكتب أخيرا التسارع المطلق :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

حيث:

$\vec{\gamma}_r$ التسارع النسبي (*accélération relative*) محسوب بالنسبة للمعلم $\mathcal{R}'$:

$$\vec{\gamma}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

$\vec{\gamma}_c$ تسارع كوريوليس[7] (*accélération de Coriolis*):

$$\vec{\gamma}_c = 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{V}_r$$

و $\vec{\gamma}_e$ التسارع المكتسب أو تسارع الجر (*accélération d'entrainement*) ويعطى بـ:

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$

ملاحظات:

- ينعدم تسارع كروليوس :
  - اذا كانت النقطة M ساكنة بالنسبة الى المعلم $\mathcal{R}'$.
  - اذا كان المعلم $\mathcal{R}'$ في حركة انسحابيه بالنسبة الى المعلم $\mathcal{R}$.

حالات خاصة:

حالة حركة انسحابيه فقط: في هذه الحالة يكون شعاع الدوران معدوما تصبح معادلات تركيب السرعات:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (2)$$

حيث:

$$\vec{V}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'; \qquad \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

بالنسبة الى تركيب التسارعات:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$$

حيث:

$$\vec{\gamma}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

$$\vec{\gamma}_c = \vec{0}; \qquad \vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

حالة حركة دورانية فقط: في هذه الحالة يكون شعاع الدوران له قيمة وسرعة حركة المعلم $\mathcal{R}'$ بالنسبة الى $\mathcal{R}$ اي $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ تصبح معادلات تركيب السرعات:

---

[7] شعاع التسارع كوريوليس هو تسارع تكميلي يسمى نسبة الى اول من وضعه *Casparad Coriolis* عام 1832.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (2)$$

حيث:

$$\vec{V}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'\vec{\imath}' + \dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}'; \qquad \vec{V}_e = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}$$

بالنسبة الى تركيب التسارعات:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

حيث:

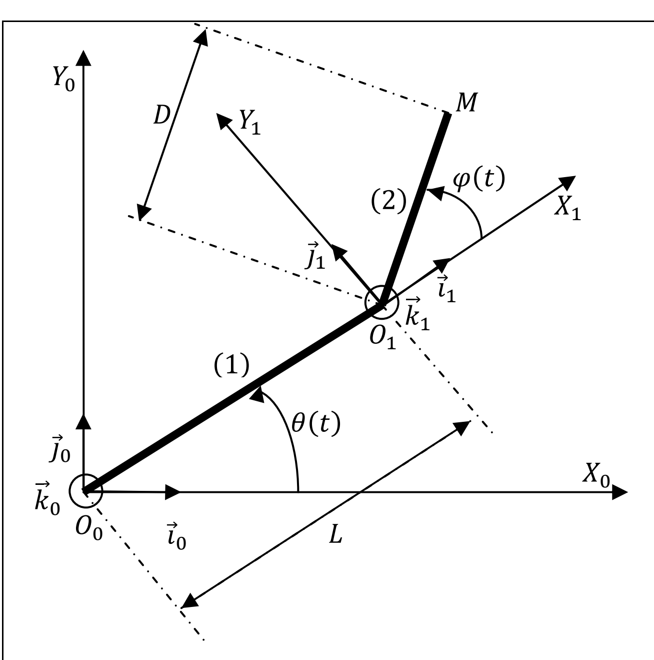
$$\vec{\gamma}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{V}_r; \quad \vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$

ملاحظة: اذا كانت حركة دورانية منتظمة فان $\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} = 0$.

تمرين6:

لتكن الجملة الممثلة بالشكل المقابل، مكونة من قضيبين. القضيب الأول (1) يدور حول المركز O_0 للمعلم الثابت $O_0X_0Y_0Z_0$، والثاني (2) في حركة دوار نية حول المركز O_1 بالنسبة إلى القضيب الأول.



1-سنهتم بحركة النقطة M بالنسبة للمعلم $O_1X_1Y_1Z_1$، كل النتائج تكتب في المعلم $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$، الزاوية $\varphi(t)$ كيفية.

1-1 باستعمال الإحداثيات القطبية $(O_1, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ في المعلم R_1، أكتب شعاع الموضع ، شعاع

السرعة $\vec{V}_{/R_1}(M)$ و شعاع التسارع $\vec{\gamma}_{/R_1}(M)$ للنقطة M.

2-1 مثل الأشعة $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ و $\vec{V}_{/R_1}(M)$ و $\vec{\gamma}_{/R_1}(M)$ وايضا اشعة المركبات المماسية والناظمية للتسارع $\vec{\gamma}_{t/R_1}(M)$ و $\vec{\gamma}_{n/R_1}(M)$ على الترتيب، في الشكل المقابل.

3-1 أكتب في الإحداثيات الديكارتية أشعة الموضع، السرعة والتسارع للنقطة بالنسبة للمعلم R_1.

2- نهتم الآن بحركة النقطة M بالنسبة المعلم $O_0X_0Y_0Z_0$ ، كل النتائج تكتب في المعلم $(O_1, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ ، الزاوية $\theta(t)$ كيفية.

1-2 أوجد شعاع الدوران $\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$.

2-2 أحسب شعاع السرعة المكتسبة (الجر)، التسارع المكتسب و تسارع كوريوليس للنقطة M.

3-2 استنتج السرعة المطلقة و التسارع المطلق للنقطة.

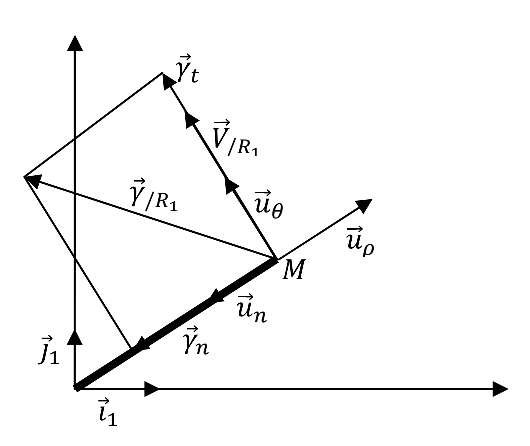
الحل:

1-1

$$\overrightarrow{O_1M} = D\vec{u}_\rho$$

$$\vec{V}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} = D\dot{\varphi}\vec{u}_\theta \quad ، \vec{\gamma}_{/R_1} = \frac{d\vec{V}_{/R_1}}{dt} = -D\dot{\varphi}^2\vec{u}_\rho + D\ddot{\varphi}\vec{u}_\theta$$

2-1 تمثيل الأشعة على الشكل.



3-1 في الاحداثيات الديكارتية:

$$\overrightarrow{O_1M} = D\cos\varphi\,\vec{\imath}_1 + D\sin\varphi\,\vec{\jmath}_1$$

$$\vec{V}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} = -D\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\imath}_1 + D\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\jmath}_1$$

$$\vec{\gamma}_{/R_1} = \frac{d\vec{V}_{/R_1}}{dt}$$
$$= -D(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\vec{\imath}_1 + D(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{\jmath}_1$$

2-1شعاع الدوران:

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}\vec{k}_1$$

2-2

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \overrightarrow{O_1M}$$
$$\overrightarrow{O_0O_1} = L\vec{\imath}_1 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt} = L\frac{d\vec{\imath}_1}{dt} = L\dot{\theta}\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \overrightarrow{O_1M} = \dot{\theta}\vec{k}_1 \times (D\cos\varphi\,\vec{\imath}_1 + D\sin\varphi\,\vec{\jmath}_1)$$
$$= -D\dot{\theta}\sin\varphi\vec{\imath}_1 + D\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{V}_e = -D\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{\imath}_1 + \left(D\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\theta}\right)\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \left(\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \overrightarrow{O_1M}\right)$$
$$\frac{d^2\overrightarrow{O_0O_1}}{dt^2} = L\ddot{\theta}\vec{\jmath}_1 + L\dot{\theta}\frac{d\vec{\jmath}_1}{dt} = L\ddot{\theta}\vec{\jmath}_1 - L\dot{\theta}^2\vec{\imath}_1$$
$$\frac{d\vec{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \times \overrightarrow{O_1M} = \ddot{\theta}\vec{k}_1 \times (D\cos\varphi\,\vec{\imath}_1 + D\sin\varphi\,\vec{\jmath}_1)$$
$$= -D\ddot{\theta}\sin\varphi\vec{\imath}_1 + D\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \left(\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \overrightarrow{O_1M}\right)$$
$$= \dot{\theta}\vec{k}_1 \times \left(-D\dot{\theta}\sin\varphi\vec{\imath}_1 + D\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{\jmath}_1\right)$$
$$= D\dot{\theta}^2(-\cos\varphi\vec{\imath}_1 - \sin\varphi\,\vec{\jmath}_1)$$
$$\vec{\gamma}_e = \left(-L\dot{\theta}^2 - D\dot{\theta}^2\sin\varphi\vec{\imath}_1 - D\ddot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{\imath}_1$$
$$+ \left(L\ddot{\theta} + D\ddot{\theta}\cos\varphi - D\dot{\theta}^2\sin\varphi\right)\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \times \vec{V}_{/R_1} = 2\dot{\theta}\vec{k}_1 \times (-D\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\imath}_1 + D\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\jmath}_1)$$
$$\vec{\gamma}_c = -2\dot{\theta}D\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\jmath}_1 - 2\dot{\theta}D\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\imath}_1$$

3-2

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{/R_1} + \vec{V}_e = \left(-D\dot{\varphi}\sin\varphi - D\dot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{\imath}_1 + \left(D\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\theta} + D\dot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{\jmath}_1$$
$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_{/R_1} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-D\ddot{\varphi}\sin\varphi + D\dot{\varphi}^2\cos\varphi - 2\dot{\theta}D\dot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\theta}^2 \right.\\
&\qquad \left. - D\dot{\theta}^2\sin\varphi - D\ddot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{\imath}_1 \\
&\qquad + \left(-2\dot{\theta}D\dot{\varphi}\sin\varphi + L\ddot{\theta} + D\ddot{\theta}\cos\varphi - D\dot{\theta}^2\sin\varphi + D\ddot{\varphi}\cos\varphi \right.\\
&\qquad \left. - D\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{\jmath}_1
\end{aligned}
$$

الفصل الرابع

تحريك النقطة المادية

علم تحريك (*dynamique*) الأجسام المادية يعتمد على دراسة الحركات مع الأسباب المؤدية إلى حدوثها، استمد هذا العلم قوانينه من مراقبة حركات الأجسام خلال قرون، أي عن طريق التجربة.

تصور1(تصور أرسطو): مادام الجسم متحركا فإنه تؤثر عليه مؤثرات خارجية، و يتوقف عن الحركة حالما يزول هذا التأثير. أي أنه توجد علاقة سببية بين التأثير والحركة، وهو تصور خاطئ .

تصور2 (تصور غاليليه): يمكن للجسم إذا لم تؤثر عليه مؤثرات خارجية الحركة بسرعة ثابتة أو يكون ساكنا. لذا فليس ضروريا ارتباط الحركة بمؤثر خارجي. فالمؤثرات الخارجية تغير من شكل الحركة فقط.

توصف التأثيرات المتبادلة بين الأجسام عن طريق مقدار فيزيائي يدعى القوة . يعتمد علم التحريك على قوانين نيوتن الثلاثة.

1.4 القوة

تفهم القوة (*force*) في الميكانيكا كسبب فيزيائي يغير الحالة الحركية للأجسام، وتظهر نتيجة لتبادل التأثير بين جسمين على الأقل، وهي مقدار شعاعي. في الفصل السابق أدخلنا مفهوم النقطة المادية كجسم يمكن إهمال كل خصائصه (أبعاد، كتلة، ..) عند دراسة حركته، لم يشكل لدينا أي مشكلا لكنه في الديناميكا يحرمنا من إدخال مفهوم القوة لذلك نستبدل النقطة المادية بجسم ممتد مع إهمال خصائصه إلا الكتلة.

- ✓ إذا أثرت على نقطة مادية مجموعة من القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، ... $\vec{F}_i$... مختلفة الاتجاهات يمكن استبدال تأثيرها بقوة محصلة عن طريق جمع المقادير الشعاعية (الفصل الأول):

$$\vec{F} = \sum_{i=1} \vec{F}_i$$

- ✓ شرط التوازن بين هذه القوى (شرط كاف) هو:

$$\vec{F} = \sum_{i=1} \vec{F_i} = \vec{0}$$

- ✓ بعد القوة: $[F] = \mathrm{MLT}^{-1}$

وحدة القوة في النظام الدولي SI : $kgms^{-1} = N$

2.4 الكتلة

تدل التجارب على أنه عندما تؤثر نفس القوة على أجسام مختلفة فإن هذه الأجسام تكتسب تسارعات متباينة. ومنه التسارع المكتسب لا يتعلق فقط بالقوة، بل بمقدار فيزيائي آخر يتعلق بتغير المادة (الحمولة) تدعى عطالة الجسم أو بالكتلة العطالية، وهي مقدار سلمي موجب وحدته في النظام الدولي SI الكيلوغرام (kg). فالكتلة ($masse$) هي مقدار المقاومة التي يبديها الجسم اتجاه أي تغيير في سرعته.

3.4 قانون نيوتن الأول (مبدأ العطالة)

ينص قانون نيوتن الاول (*première loi de Newton*) او مبدأ العطالة (*principe d'inertie*):

الجسم الساكن يبقى ساكن، والجسم المتحرك يستمر في حركته و بخط مستقيم وسرعة ثابتة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تتسبب في تغير حالته الحركية، و نقول عن الجسم انه حر الحركة أو معزول.

- ✓ يتضمن قانون نيوتن الأول وضع السكون، و هو حالة خاصة من الحركة المستقيمة المنتظمة $V =$ ثابت $= 0$.
- ✓ يتضمن أيضا تقييم للقوة، على أنها تستطيع تغيير حالة السكون والحركة المستقيمة المنتظمة.
- ✓ إن الأجسام غير قادرة أو قاصرة عن تغيير حالتها الحركية مقدارا او اتجاها او كليهما، لذلك يسمى المبدأ بمبدأ العطالة أو القصور الذاتي.
- ✓ هذا القانون صحيح ابتداء من الأجرام السماوية إلى ذرات الغبار.
- ✓ في الواقع لا يمكن البرهان على هذا القانون ولكن يقبل دون برهان، فلا توجد أجسام حرة تماما، لأنه يستحيل أن نحذف كل القوى الموجودة في الطبيعة، لنذكر بأنواعها:

– قوى التجاذب الكتلي: قوة بعيدة التأثير (مثلا تتأثر كل الأجسام بحركة الشمس والقمر والمجرات التي لا يمكن أن نعزل الجسم عنها).

– قوى التجاذب الكهروطيسية: قوة بعيدة التأثير.

– القوى النووية القوية و القوى النووية الضعيفة: قوة ضعيفة التأثير يمكن التخلص منها.

- ✓ لم يكن اختيار جملة الإحداثيات في الحركيات مشكلا، فكافة الجمل متكافئة فيما بينها. أما في الديناميكا فالحال مختلف. لنفرض أن لدينا جسم ما في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لجملة إحداثيات ما، فحسب قانون تركيب السرعات فإن حركة هذا الجسم تختلف في جملة إحداثيات أخرى أي أن القانون الأول ليس محققا في كل جمل الاحداثيات، لذلك أقر الميكانيكا الكلاسيكي بوجود جمل مقارنة تتحرك فيها كافة الأجسام الحرة بحركة مستقيمة منتظمة وتدعى جمل عطالية (المعالم العطالية ***les référentiels inerties*** او المعالم الغاليلية ***les référentiels Galiléens***).
- ✓ الحكم على معلم انه عطالي أو عدمه يكون عن طريق التجربة التي نحقق فيها قانون نيوتن الأول في هذا المعلم (مبدأ العطالة).
- ✓ فإذا كان لدينا معلم عطالي وليكن $\mathcal{R}$، نستطيع أن نجد مالا نهاية من المعالم العطالية الأخرى حيث تتحرك كلها بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة إلى $\mathcal{R}$، تتم فيها كافة الظواهر الفيزيائية بنفس الشكل.

4.4 قانون نيوتن الثاني (المبدأ الأساسي للتحريك)

كل جسم يخضع لقوة يكتسب تسارعا $\vec{\gamma}$ تتفق جهته مع جهة القوة المؤثرة عليه. بمقارنة تأثير قوى مختلفة على جسم واحد كتلته m، أوجد أن التسارع $\vec{\gamma}$ متناسب طردا مع شعاع القوة:

$$\vec{\gamma} \sim \vec{F} \qquad (1)$$

إذا أثرت نفس القوة على أجسام مختلفة الكتل فان التسارعات المكتسبة مختلفة و تتناسب عكسيا مع الكتل:

$$|\vec{\gamma}| \sim \frac{1}{m} \qquad (2)$$

إذا كانت m ثابتة فمن (1) و (2) نجد:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

وهي التعبير الرياضي للقانون الثاني لنيوتن.

ينص القانون الثاني لنيوتن (*deuxième loi de Newton*) او كما هو معروف بالمبدأ الاساسي للتحريك (*le principe fondamentale de la dynamique*):

في معلم عطالي، شعاع محصلة القوة الخارجية المؤثرة على نقطة مادية ذات كتلة m يساوي عدديا جداء كتلة النقطة المادية في شعاع تسارعها الذي تكتسبه تحت تأثير هذه القوة.

- ✓ القانون الأول لنيوتن عبارة على حالة خاصة من القانون الثاني، إذا لم تكن النقطة المادية تخضع إلى أي قوة:

$$m\vec{\gamma} = \vec{0}$$

- ✓ إذا أثرت على نقطة مادية مجموعة من القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، ...، $\vec{F}_i$،...فإن القانون الثاني يعطي:

$$\vec{F} = \sum_{\mathrm{i}=1} \vec{F}_{\mathrm{i}} = m\vec{\gamma}$$

5.4 قانون نيوتن الثالث (مبدأ الفعل ورد الفعل)

اقتصرنا لحد الآن على دراسة جانب واحد من التأثير. فالتأثير في الطبيعة يكون متبادلا بين جسمين أو أكثر. ينص القانون الثالث لنيوتن (*troisième loi de Newton*) او مبدأ الفعل ورد الفعل (*le principe de l'action et de la réaction*):

أن قوتي التأثير المتبادل بين نقطتين ماديتين متساويتان بالقيمة و متعاكستان بالجهة وتؤثران وفق المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- ✓ تدعى إحدى القوتين بالفعل والأخرى برد الفعل.
- ✓ لكل فعل رد فعل مساوي له بالقيمة ومعاكس له بالجهة وله الطبيعة نفسها. مثال: يضغط صندوق ثقيل على منضدة أفقية بقوة شاقوليه نحو الأسفل، وبالمقابل يخضع لرد فعل موجه شاقولي نحو الأعلى: الفعل ضغط الصندوق ورد الفعل تشوه المنضدة.

- ✓ القوى $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$ التي تظهر في القانون الثالث لنيوتن لا تطبق معا على نفس الجسم، واحدة فقط من القوتين تؤخذ بالاعتبار، فعند دراسة حركة الجسم الأول نأخذ قوة التأثير تأثير الجسيم الثاني على الأول بعين الاعتبار والعكس صحيح.

6.4 قانون تغير و انحفاظ كمية الحركة (تعميم قوانين نيوتن)

من اجل إعطاء الصياغة العامة لقوانين نيوتن، لان هناك حالات تكون الكتلة فيها غير ثابتة، لذلك ندخل مفهوم الاندفاع أو ما يسمى بكمية الحركة (*quantité de mouvement*). فاندفاع جسم كتلته m وسرعته $\vec{V}$ هو المقدار الشعاعي، نرمز له $\vec{P}$ ، المعرف ب:

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

شعاع الاندفاع له نفس اتجاه شعاع السرعة و يربط بين مقدارين واصفين للحالة الحركية للجسيم الكتلة m و السرعة $\vec{V}$.

- ✓ بعد كمية الحركة يعطى:

$$[\vec{P}] = [m][\vec{V}] = MLT^{-1}$$

ومنه وحدة كمية الحركة في النظام الدولي : $kgms^{-1}$.

لقد صاغ نيوتن قانونه الثاني بدلالة تغير كمية الحركة:

في معلم عطالي، يتناسب تغير اندفاع الجسم طردا مع القوة المحركة، ويتم وفق نفس المستقيم الذي تؤثر وفقه القوة.

بطريقة رياضية:

مشتق اندفاع الجسم بالنسبة للزمن يساوي القوة المؤثرة عليه، قيمة وجهة، وهي الصياغة العامة للقانون الثاني لنيوتن:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

- ✓ في حالة m ثابتة يصبح القانون الثاني: $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{\gamma}$.
- ✓ إذا كانت القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم معدومة أي أن الجسيم حر فإن:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} = \vec{c} \ \left(\text{شعاع ثابت}\right)$$

اندفاع الجسيم الحر يبقى ثابتا. يدعى ثبات $\vec{P}$ بقانون مصونية او انحفاظ الاندفاع، وهو شكل اخر للقانون الأول لنيوتن (قانون العطالة).

✓ ليكن جسمان A و B متفاعلين فقط مع بعض، ويكونان نظاما معزولا:

$$\frac{d\vec{P}_A}{dt} = \vec{F}_{BA} \quad \left(\text{القوة المؤثرة من طرف } B \text{ على } A\right)$$

$$\frac{d\vec{P}_B}{dt} = \vec{F}_{AB} \quad \left(\text{القوة المؤثرة من طرف } A \text{ على } B\right)$$

مع : $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_A + \vec{P}_B\right) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{P}_A + \vec{P}_B = \overrightarrow{\text{ثابت}}$$

وهي شكل آخر للقانون الثالث لنيوتن.

ملاحظة: تكون كمية الحركة الكلية لجملة معزولة مكونة من n جسيما ثابتة في مرجع عطالي:

$$\vec{P} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \vec{P}_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_i}\vec{V}_{\mathrm{i}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots = \vec{\mathrm{c}} \ (\text{شعاع ثابت})$$

تطبيق مبدأ انحفاظ كمية الحركة:

✓ **التصادم المرن بين جسمين:**

نسمي التصادم التلاقي بين جسم متحرك بحاجز، أو بجسم آخر متحرك أو ساكن. و يكون هذا التصادم مرنا إذا كانت الطاقة الحركية عندئذ محفوظة:

$$\underbrace{\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}}_{\text{قبل التصادم}} = \underbrace{\overrightarrow{P'_1} + \overrightarrow{P'_2}}_{\text{بعد التصادم}}$$

$$\underbrace{E_{C_1} + E_{C_2}}_{\text{قبل التصادم}} = \underbrace{E'_{C_1} + E'_{C_2}}_{\text{بعد التصادم}}$$

✓ **انشطار جسم إلى جزأين:**

كمية الحركة قبل الانشطار تساوي كمية الحركة بعد الانشطار:

$$\vec{P} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} \quad , m = m_1 + m_2$$

$$m\vec{V} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}$$

تمرين 1:

يستنتج قانون المبدأ الأساسي للتحريك من تغير كمية الحركة على الشكل:

$$\sum_i \vec{F_i} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

لماذا هذا التعريف لا يصح إلا في مرجع غاليلي ؟

الجواب: في المراجع الغاليلية كل تغير في كمية الحركة (السرعة) هو حتما ناتج فقط عن تأثير القوى المطبقة.

7.4 المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية

يحدد موضع نقطة مادية M ذات الكتلة m في المعلم العطالي بشعاع الموضع $\vec{r}$ حيث تكون $\vec{F}$ المؤثرة على M تتعلق بالموضع أو بالسرعة أو بالزمن $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t)$، ويكتب المبدأ الأساسي للتحريك في حالة ثبات الكتلة:

$$m\vec{\gamma} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t)$$

و تدعى المعادلة التفاضلية لحركة نقطة مادية في شكلها الشعاعي.

✓ في المعلم الديكارتي: $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$ و $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$،

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

✓ في المعلم الأسطواني: $\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

و $\vec{F} = F_\rho\vec{\imath} + F_\theta\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$،

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho \\ m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = F_\theta \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

✓ في المعلم الذاتي (الأصلي): $\vec{\gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_t + \frac{V^2}{R}\vec{u}_n$ و $\vec{F} = F_t\vec{u}_t + F_n\vec{u}_n + F_b\vec{u}_b$

$$\begin{cases} m\gamma_t = m\dfrac{dV}{dt} = F_t \\ m\gamma_n = m\dfrac{V^2}{R} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

8.4 مسائل التحريك

المسألة 1: حركة النقطة المادية معطاة، المطلوب تعيين القوة؟

الحل: يعوض عن قانون الحركة في المعادلات التفاضلية و نحصل باشتقاق الإحداثيات على مساقط القوة.

تمرين 2:

يعطى قانون الحركة لنقطة مادية كتلتها m في المستوي OXY:

$$y = bt^2 \, , x = at$$

حيث b و a ثوابت.

إيجاد $\vec{F}$ ، لدينا في المعلم الديكارتي مساقط قانون نيوتن الثاني يعطى:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m2b \ ,$$

$$\vec{F} = 2bm\vec{j}$$

المسألة 2: القوة المؤثرة على نقطة مادية كتلتها m معلومة، و المطلوب إيجاد قانون الحركة ؟

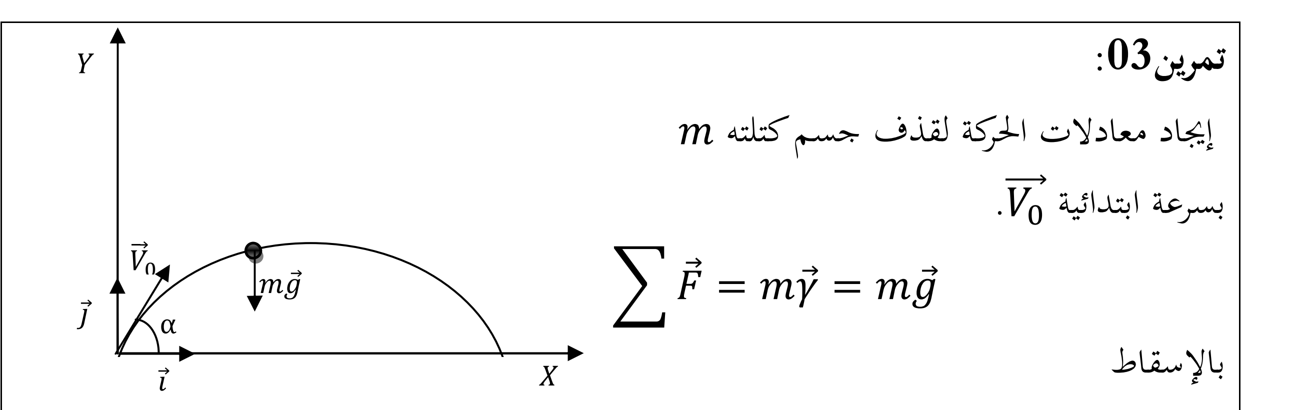
الحل:

- توضيح المقادير(القوى) الواصفة لحالة الجملة الفيزيائية.
- كتابة معادلات الحركة الواصفة لتغير الحالة مع الزمن.
- حل المعادلات التفاضلية وإيجاد المقادير بشروط ابتدائية (المكاملة).

تمرين 03:

إيجاد معادلات الحركة لقذف جسم كتلته m

بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{V_0}$.



$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = m\vec{g}$$

بالإسقاط

$$\begin{cases} F_x = 0 = m\dfrac{dx^2}{dt^2} \Rightarrow \dot{x} = C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2 \\ F_y = -mg = m\dfrac{dy^2}{dt^2} \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_3 \Rightarrow y = -\dfrac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4 \end{cases}$$

لإيجاد الثوابت نستعمل الشروط الابتدائية:

$$\vec{V}(t=0) = \vec{V}_0 = V_0 \cos\alpha\, \vec{\imath} + V_0 \sin\alpha\, \vec{\jmath}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t=0) = C_1 = V_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t=0) = C_3 = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\dot{x} = C_1 = V_0 \cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad x = V_0(\cos\alpha)t$$
$$\dot{y}(0) = C_2 = V_0 \sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad y = V_0(\sin\alpha)t$$

$$\vec{r}(t=0) = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} x(t=0) = C_2 = 0 \\ y(t=0) = C_4 = 0 \end{cases}$$

ومنه معادلات الحركة:

$$\begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\dfrac{g}{2}t^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

9.4 قوانين بعض القوى

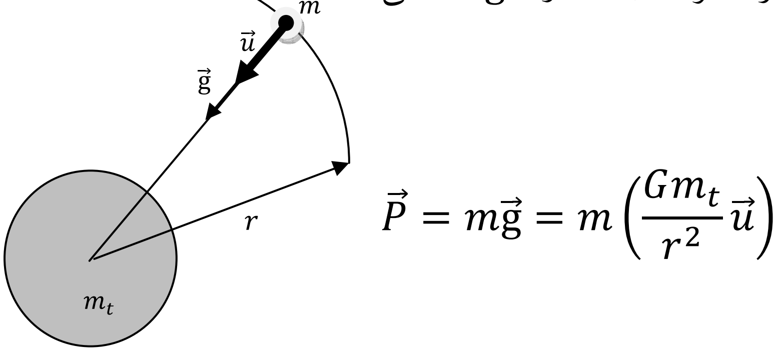
قوة التجاذب (*gravitation*) و الثقل(*poids*):

وجد نيوتن أن الكواكب تتأثر فيما بينها بقوة تدعى تجاذب، تتناسب عكسيا مع البعد بين الجسمين المتجاذبين و طردا مع كتلتيهما، فإذا كان لدينا جسمان m_1 و m_2 تفصلهما مسافة r_{12} فإن قوة التجاذب بينهما:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} = -\frac{Gm_1m_2}{{r^2}_{12}}\vec{u}$$

حيث G ثابت الجذب بالعام ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$).

✓ الثقل = القوة التي تؤثر بها الأرض كتلتها m_t على جسم كتلته m ما واقع بالقرب من السطح على بعد r من مركزها، وتكسبه تسارعا $\vec{g}$، تسمى ثقل الجسم $\vec{P}$.



$$\vec{P} = m\vec{g} = m\left(\frac{Gm_t}{r^2}\vec{u}\right)$$

✓ تسارع الجاذبية الأرضية الناتج عن قوة جذب الأرض للأجسام الواقعة على سطحها والموجهة نحو مركز الأرض:

$$g = \frac{Gm_t}{{R_t}^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}.\,5.98 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6)^2} = 9.8\ Nkg^{-1}$$

كتلة الارض m_t: $5.98 \times 10^{24} kg$.

نصف قطر الارض R_t: $6.37 \times 10^6 m$

القوة الكهرومغناطيسية: (الحركة في حقل منتظم)

✓ القوة الكهربائية (*force électrique*): في وجود حقل كهربائي يخضع جسيم مشحون بشحنة q وكتلته m إلى قوة كهربائية :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- ✓ القوة المغناطيسية (*force magnétique*): عندما يتحرك جسم مشحون بشحنة q، بسرعة $\vec{V}$ في حقل مغناطيسي $\vec{B}$، فإنه يخضع إلى قوة:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- ✓ القوة الكهرومغناطيسية (*force électromagnétique*): عند وجود الحقلين معا تدعى القوة بقوة لورنتز:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

قوى الاحتكاك (*force de frottement*):

ينتج الاحتكاك (*frottement*) من تلامس سطحين مع بعضهما، وتظهر نتيجة لذلك قوة تعرف بقوة الاحتكاك، وهي معيقة للحركة، أي اتجاهها دائما في الاتجاه المعاكس للحركة، و ينقسم إلى نوعين:

- ✓ **الاحتكاك الجاف (*frottement solide*)**: يكون بين سطحين صلبين في غياب مائع بينهما، و يختلف باختلاف المادة المكونة للسطوح المتلامسة و الحالة الفيزيائية للسطح من حيث النعومة و الملاسة، و تتناسب قوة الاحتكاك الجاف طردا مع رد فعل السطح السفلي على السطح العلوي.

$\vec{N}$ $\vec{F}$ $\vec{V}$

$$|\vec{F}| \propto |\vec{N}|$$

إن معامل التناسب يعرف بمعامل الاحتكاك ويتوقف هذا المعامل على طبيعة الاحتكاك، ففي حالة الاحتكاك الساكن (*frottement statique*) و يرمز له بـ μ_s:

$$F_s \le \mu_s N$$

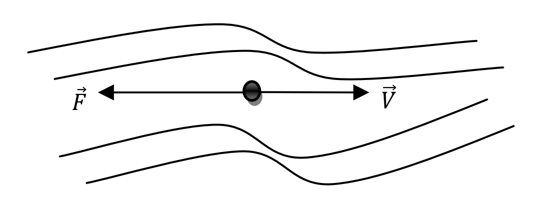
يحدث التساوي في العلاقة السابقة عندما يكون الجسم على وشك الحركة، بعدها يتحول الاحتكاك الساكن إلى احتكاك حركي(*frottement cinétique*) الذي يعطى بدلالة معامل الاحتكاك الحركي μ_k و يعطى:

$$F = \mu_k N$$

حيث:

$$\mu_s > \mu_k$$

✓ **الاحتكاك اللزج** (**frottement visqueux**): يكون بين جسم صلب متحرك بسرعة $\vec{V}$ و مائع محيط به، حيث يتعلق الاحتكاك بهذه السرعة.



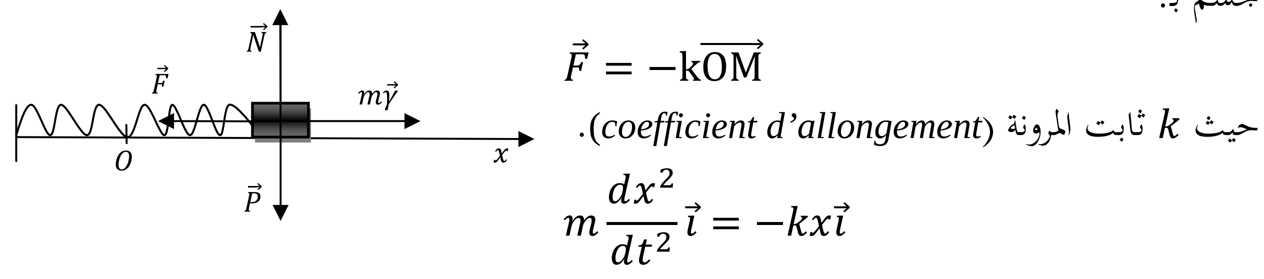
من أجل السرعات الصغيرة (قانون ستوكس):

$$\vec{F} = -\alpha\vec{V}$$

α معامل الاحتكاك.

القوى المرنة (***force tension***):

وهي أكثر الحركات مشاهدة. تنشأ نتيجة لتشوه جسم مرن مثل النابض(*ressort*)، وهي قوة معيقة تحاول إرجاع النابض إلى حالته الأساسية، و تعطى القوة المرنة المطبقة من طرف النابض على جسم بـ:



$$\vec{F} = -\mathrm{k}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

حيث k ثابت المرونة (*coefficient d'allongement*).

$$m\frac{dx^2}{dt^2}\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$$

x الاستطالة.

10.4 حالات خاصة لمكاملة معادلات الحركة

حالة القوة المتعلقة بالزمن :

في شروط ابتدائية $\vec{V}(0) = \overrightarrow{V_0}$ و $\vec{r}(0) = \overrightarrow{r_0}$ تؤثر على نقطة مادية m قوة $\vec{F}(t)$ فيكون:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) \Longrightarrow \int_{\overrightarrow{V_0}}^{\vec{V}} d\vec{V} = \int_{t=0}^{t} \frac{\vec{F}(t)}{m}dt \Longrightarrow \vec{V} = \int_0^t \frac{\vec{F}(t)}{m}dt + \overrightarrow{V_0}$$

حالة مساقط القوة توابع للإحداثيات المرافقة فقط:

$$\vec{F} = F_x(x)\vec{\imath} + F_y(y)\vec{\jmath} + F_z(z)\vec{k}$$

$$m\ddot{x} = F_x(x) \Longrightarrow m\dot{x}\ddot{x} = F_x(x)\dot{x} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = \frac{2}{m}F_x(x)\frac{dx}{dt}$$

نكامل فنجد:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(x)dx + {\dot{x}_0}^2 \Longrightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \mp\left[\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(x)dx + {\dot{x}_0}^2\right]^{1/2}$$

و هكذا المعادلات الأخرى.

حالة مساقط القوة توابع لمساقط السرعة الموافقة:

$$F_x = f_1(\dot{x})\,, \qquad F_y = f_2(\dot{y})\,, \qquad F_z = f_3(\dot{z})$$

$$m\ddot{x} = f_1(\dot{x}) \Longrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{f_1(\dot{x})}{m} \Longrightarrow dt = \frac{m}{f_1(\dot{x})}d\dot{x}$$

يمكن الحصول على x بدلالة $\dot{x}$ ،

$$dx = \dot{x}dt = \dot{x}\frac{md\dot{x}}{f_1(\dot{x})} \Longrightarrow x = m\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x}d\dot{x}}{f_1(\dot{x})} + x_0$$

و هكذا المعادلات الأخرى.

القوة المؤثرة على النقطة المادية من الشكل:

$$\vec{F}\left(\vec{r},\vec{V},t\right) = -k\vec{r} - \alpha\vec{V} + \vec{f}(t) = m\vec{\gamma}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{m}\dot{\vec{r}} + \frac{k}{m}\vec{r} = \frac{\vec{f}(t)}{m}$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بطرف ثان (انظر الملحق الرابع).

تمرين 4:

تخضع شحنة نقطية كهربائية موجبة q، كتلتها m الى حقل كهربائي $\vec{E} = E\vec{j}$ وحقل مغناطيسي $\vec{B} = B\vec{k}$ طويلتهما ثابتة. عند اللحظة $t = 0$، و انطلاقا من النقطة $'O'$، تتحرك الشحنة بسرعة $\vec{V}_0$ موازية للمحور OX.

أحسب موضع الشحنة $M(x,y,z)$ بدلالة t و E و B و V_0 و $\omega = qB/m$.

الحل:

القوة المؤثرة على الشحنة النقطية هي قوة لورنتز وتعطى:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \times \vec{B}$$

لدينا:

$$\vec{E} = E\vec{j}\ , \qquad \vec{B} = B\vec{k}, \qquad \vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \dot{y}B\vec{i} - \dot{x}B\vec{j}$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) = m\vec{\gamma} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

بالإسقاط على المحاور نجد:

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = 0 \qquad (3)$$

باستخدام الشروط الابتدائية عند $t = 0$ لدينا:

$$x = 0\,, y = 0\,, z = 0 \quad \text{و} \quad \vec{V}(t=0) = \vec{V}_0 = V_0\vec{i}$$

$$\ddot{z} = 0 \Longrightarrow \dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow z = \text{ثابت} = 0$$

نكامل المعادلة (1) مرة واحدة بالنسبة إلى الزمن فنحصل:

$$m\dot{x} = qBy + C \qquad (5)$$

C ثابت التكامل يعين بواسطة الشروط الابتدائية السابقة:

عند $t = 0$ لدينا: $\dot{x} = V_0$ و $y = 0$ $\Leftarrow$ $C = mV_0$ فتصبح المعادلة (5):

$$m\dot{x} = qBy + mV_0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{qBy}{m} + V_0 = \omega y + V_0 \qquad (5')$$

نعوض في المعادلة (2) بقيمة $\dot{x}$:

$$m\ddot{y} = qE - \frac{q^2B^2}{m}y - qV_0B \Rightarrow \ddot{y} + \frac{q^2B^2}{m^2}y = \frac{q}{m}E - qV_0B \Rightarrow$$

$$\ddot{y}+\omega^2 y=\frac{\omega}{B}E-\omega V_0 \qquad (6)$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية نستعمل الملحق الرابع، ويكون الحل من الشكل:

الحل العام:

$$y_g=A.\cos(\omega t)+B.\sin(\omega t)$$

الحل الخاص: بمساعدة الملحق الرابع اذا كان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ثابت نأخذ الحل الخاص ثابت ونجده بتعويضه كحل في المعادلة التفاضلية (6):

$$y_p=C_1 \Longrightarrow \omega^2 C_1=\frac{\omega}{B}E-\omega V_0 \Longrightarrow y_p=C_1=\frac{E}{B\omega}-\frac{V_0}{\omega}$$

ومنه الحل:

$$y=y_g+y_p=A.\cos(\omega t)+B.\sin(\omega t)\ +\frac{E}{B\omega}-\frac{V_0}{\omega}$$

لحساب الثوابت A و B نستعمل الشروط الابتدائية: عند $t=0$ لدينا $y=0$ و $\dot{y}=0$

$$y(t=0)=A+\frac{E}{B\omega}-\frac{V_0}{\omega}=0 \Longrightarrow A=\left(\frac{V_0}{\omega}-\frac{E}{B\omega}\right)$$

$$\dot{y}(t)=A\omega\sin(\omega t)-B\omega\cos(\omega t)\ \Longrightarrow \dot{y}(t=0)=0 \Longrightarrow B=0$$

$$y=\frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B}-V_0\right)(1-\cos\omega t) \qquad (7)$$

يبقى إيجاد تكامل المعادلة $(5')$ بعد تعويض(7):

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{E}{B}-V_0\right)(1-\cos\omega t)+V_0 \Longrightarrow$$

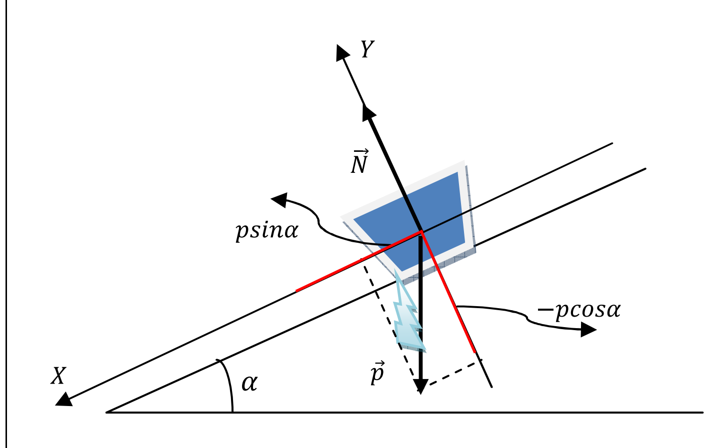
$$x(t)=\frac{E}{B}t-\frac{E}{B\omega}\sin\omega t+\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t+C$$

باستعمال الشروط الابتدائية $t=0$، $x=0$ نجد $C=0$

يعطى موضع الشحنة النقطية بالإحداثيات:

$$\begin{cases} x=\frac{E}{B}t-\frac{E}{B\omega}\sin\omega t+\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \\ y=\frac{1}{\omega}\left(\frac{E}{B}-V_0\right)(1-\cos\omega t) \\ Z=0 \end{cases}$$

تمرين 5:



ينزل خزان مملوء بالماء تحت تأثر ثقله، مستوى مائل على الأفقي بزاوية α، وهو يفقد الماء من فتحة بأسفل مقدمته بسرعة تدفق ثابتة $\mu = \frac{dm}{dt}$) كمية الكتلة المتسربة في وحدة الزمن)، كتلة الخزان في اللحظة الابتدائية $t = 0$ كانت M_0 وسرعته معدومة. إذا أهملنا قوة الاحتكاك.

1. أوجد السرعة اللحظية للخزان.

الحل:

بما أن هناك تسرب للماء من الخزان بسرعة μ ثابتة فان كتلة الماء المفقود تعطى:

$$\mu = \frac{dm}{dt} \Longrightarrow \int_0^{m\prime} dm = \int_0^t \mu dt \Rightarrow m' = \mu t$$

و تصبح كتلة الجملة (الخزان والماء المتبقي به) في اللحظة ما:

$$m = M_0 - m' = M_0 - \mu t \qquad (1)$$

كتلة الجملة في هذا التمرين متغيرة بدلالة الزمن لذلك نستعمل قانون نيوتن العام اي:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{m}\vec{\mathrm{V}})}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \vec{\mathrm{p}} + \vec{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{V}} + \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} \qquad (2)$$

بإسقاط هذه المعادلة الشعاعية على المحاور OX و OY مع تعويض المعادلة (1) في المعادلة (2)

نحصل على معادلتين:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\mu}{\mu t - M_0} V = \mathrm{g}sin\alpha \qquad (3)$$

$$N - (M_0 - \mu t)\mathrm{g}cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

من المعادلة (4) نستطيع حساب رد فعل المستوي المائل:

$$N = (M_0 - \mu t)\mathrm{g}cos\alpha$$

المعادلة (3) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى للمتغير V، لحل هذه المعادلة نستخدم المعادلة

(10) في الملحق الرابع:

$$V(t) = e^{\left(-\int \frac{\mu}{\mu t - M_0} dt\right)} . \left[c + \int g sin\alpha \, e^{\left(\int \frac{\mu}{\mu t - M_0} dt\right)} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\mu t - M_0} \left[c + g sin\alpha \int (\mu t - M_0) \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{\mu t - M_0} \left[c + g sin\alpha \left(\frac{\mu}{2} t^2 - M_0 t \right) \right]$$

الثابت c يحسب باستخدام الشرط الابتدائي $C = 0 \Leftarrow V(t = 0) = 0$

$$V(t) = \frac{g sin\alpha}{\mu t - M_0} \left[\left(\frac{\mu}{2} t^2 - M_0 t \right) \right]$$

$$= \frac{g sin\alpha M_0}{2\mu} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\mu}{M_0} t\right)} - \left(1 - \frac{\mu}{M_0} t\right) \right]$$

11.4 العزم الحركي

في الواقع لدراسة حركة الأجسام من الضروري أخذ دوران الجسم بعين الاعتبار، إضافة إلى حركته الانسحابية، وبما أن الدوران ناتج عن قوة، ندخل عزم القوة (*moment d'une force*) و العزم الحركي (*moment cinétique*).

نعرف عزم القوة $\vec{M}_{/A}$ المؤثرة على النقطة M بالنسبة لنقطة A:

$$\vec{M}_{/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{F}$$

نستطيع استنتاج قانون يعطينا أثر الدوران بدءا من قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \Longrightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{AM} \times \vec{P} \right)$$

حيث: $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$ و $\vec{P}$ شعاع كمية الحركة.

نعرف العزم الحركي $\vec{L}_{/A}$ للنقطة المادية M بالنسبة إلى النقطة A بالعلاقة:

$$\vec{L}_{/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{P} \Longrightarrow \vec{M}_{/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}$$

تدعى العلاقة الأخيرة بنظرية العزم الحركي. إن تغير العزم الحركي بالنسبة للزمن ما هو إلا كتابة أخرى للمبدأ الأساسي للتحريك.

ملاحظة: إنه من الضروري أن يحسب العزم الحركي وعزم القوة بالنسبة إلى نفس النقطة الثابتة A.

في حالة جسم مكون من مجموعة جسيمات يعرف العزم الحركي على أنه مجموع العزوم الحركية المكونة له:

$$\vec{L}_{/A} = \sum_i \vec{L}_{i/A} \Longrightarrow \vec{M}_{/A} = \sum_i \vec{M}_{i/A}$$

ملاحظة: في حالة القوى المركزية التي تمر دائما بنفس النقطة ولتكن A مثلا :

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt} = \overrightarrow{AM} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_{/A} = \overrightarrow{\text{ثابت}}$$

نقول عن الحركة أنها تحقق مبدأ انحفاظ العزم الحركي.

ملاحظة:

- ✓ إذا وضعنا $\vec{L}_{/A} = L_{/A}\vec{u}$

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt} = \frac{dL_{/A}}{dt}\vec{u} + L_{/A}\frac{d\vec{u}}{dt}$$

إذا كان:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{\text{ثابت}}$$

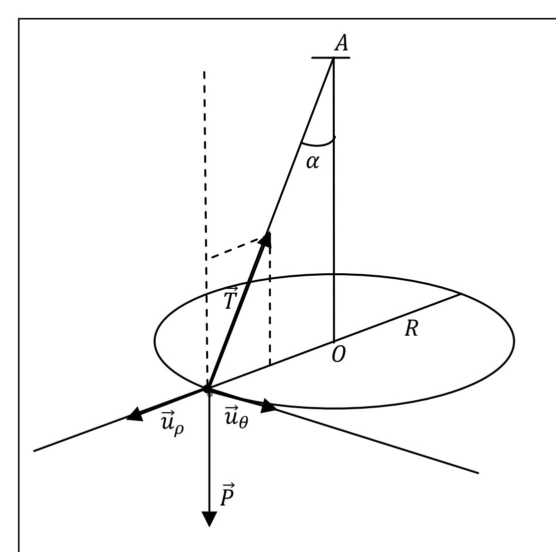
يعني أن العزم الحركي يحافظ على اتجاه ثابت.

- ✓ كي تكون الحركة مستوية يجب أن يكون العزم الحركي $\vec{L}_{/A}$ عموديا على $\overrightarrow{AM}$ أي:

$$\vec{L}_{/A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

تمرين6:

تربط نقطة مادية M كتلتها m بواسطة خيط غير قابل للتمدد طوله $AM = L$ ومهمل الكتلة ترسم هذه النقطة دائرة نصف قطرها $OM = R$ وفق حركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω. لتكن α



الزاوية التي يصنعها AM مع الشاقول OA .

1. عبر عن قيمة α بدلالة L و g و ω واحسب توتر الخيط.
2. أحسب كمية الحركة.
3. أحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة لـ A.
4. أحسب عزم محصلة القوى المطبقة على M بالنسبة لـ A، وتحقق من نظرية العزم الحركي.

الإجابة:

1. بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على M:

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = -R\omega^2\vec{u}_\rho \end{cases}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma} = -mR\omega^2\vec{u}_\rho$$

بالإسقاط على الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ نجد:

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z\,, \qquad \vec{T} = -T\sin\alpha\,\vec{u}_\rho + T\cos\alpha\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} -T\sin\alpha = -mR\omega^2 & (1) \\ -mg + T\cos\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2):

$$T\cos\alpha = mg \qquad (3)$$

بقسمة (1) على (3) نحصل على:

$$\tan\alpha = \frac{R\omega^2 m}{mg} = \frac{R\omega^2}{g}$$

$$R = L\sin\alpha \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{\omega^2 L\sin\alpha}{g} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}$$

نحصل على توتر الخيط بتعويض قيمة $\cos\alpha$ في المعادلة (3):

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = mL\omega^2$$

2. حساب كمية الحركة $\vec{P}$

$$\vec{P} = m\vec{V} = mR\omega\vec{u}_\theta\ , \qquad |\vec{P}| = mR\omega$$

3. حساب العزم الحركي:

$$\vec{L}_{/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{P} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = L\sin\alpha\,\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\vec{u}_z$$

$$\vec{L}_{/A} = \left(L\sin\alpha\,\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\vec{u}_z\right) \times mR\omega\vec{u}_\theta$$

$$= mLR\omega\,\sin\alpha\,\vec{u}_z + mLR\,\omega\,\cos\alpha\,\vec{u}_\rho$$

$$|\vec{L}_{/A}| = mLR\omega$$

4. حساب عزم محصلة القوى بالنسبة A:

$$\vec{M}_{/A} = \vec{M}_{\vec{P}/A} + \vec{M}_{\vec{T}/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{P} + \overrightarrow{AM} \times \vec{T}$$

$$\vec{M}_{\vec{T}/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{T} = \vec{0} \qquad \left(\overrightarrow{AM}\ //\ \vec{T}\right)$$

$$\vec{M}_{/A} = \vec{M}_{\vec{P}/A} = \overrightarrow{AM} \times \vec{P} = \left(L\sin\alpha\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\vec{u}_z\right) \times (-mg\vec{u}_z)$$

$$= mgL\sin\alpha\vec{u}_\theta$$

نظرية العزم الحركي:

$$\vec{M}_{/A} = \frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt} = mLR\omega\cos\alpha\frac{d\vec{u}_r}{dt} + mLR\omega\sin\alpha\frac{d\vec{u}_z}{dt} = mLR\omega^2\cos\alpha\,\vec{u}_\theta$$

$$= mLg\sin\alpha\,\vec{u}_\theta = \vec{M}_{/A}$$

$$R\omega^2\cos\alpha = g\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{L}$$

ومنه نظرية العزم الحركي محققة.

الفصل الخامس

العمل والطاقة للنقطة المادية

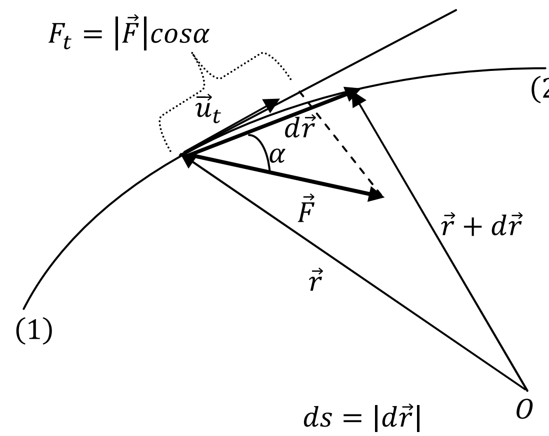
الحلول الدقيقة لمعادلات الحركة لنظام ميكانيكي في الحالة العامة تكاد تكون مستحيلة، إذ تتطلب معرفة المواضع الابتدائية للنقطة المادية، وأيضا جميع القوى المؤثرة عليها. في الواقع إن استعمال بعض المقادير السلمية بدل الشعاعية يسمح لنا في أحيان كثيرة باختصار الحسابات السابقة، والحصول على مفهوم واضح للظواهر. هذه المقادير السلمية هي مقادير ثابتة لا تتغير مع الزمن تدعى المقادير الطاقوية.

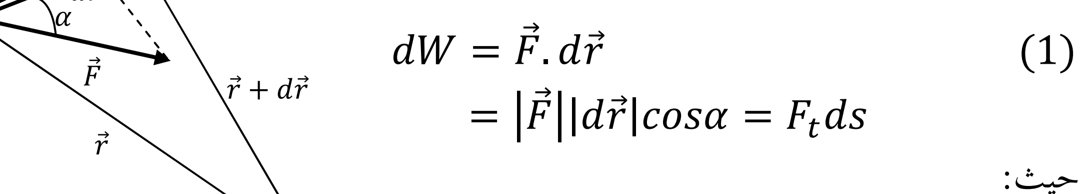
في هذا الفصل سنهتم بإدخال مفهوم الطاقة والعمل، وأيضا التمييز بين أنواع القوى المحافظة وغير المحافظة. حيث ان الطاقة هي المقدرة على إنجاز العمل، وهي تنتقل من جسم لآخر، ولا تفنى ولا تستحدث من العدم، فإذا أنجز جسم ما عملا على جسم أخر فان طاقة الجسم الأول تقل بمقدار ما أنجزه من عمل وتزداد طاقة الجسم الثاني بمقدار العمل المبذول، ولذلك فإن العمل هو الوسيلة لنقل الطاقة بين الأجسام، فالطاقة والعمل لهما نفس المفهوم والوحدات، وللطاقة نوعان طاقة حركية والطاقة الكامنة.

1.4 العمل

العمل (*travail*) هو كمية فيزيائية تقوم القوة بإنجازها على النقطة المادية (جسم) المؤثرة عليها.

العمل العنصري للقوة $\vec{F}$، يرمز له بـ dW، خلال الانتقال $d\vec{r}$ هو عبارة عن حاصل الجداء السلمي للقوة والانتقال:





$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \qquad (1)$$
$$= |\vec{F}||d\vec{r}|cos\alpha = F_t ds$$

حيث:

$$F_t = |\vec{F}|cos\alpha$$

العمل هو مقدار جبري يمكن أن يكون موجبا أو سالبا أو معدوما حسب الزاوية α. فمن أجل الانتقالات العمودية على القوة $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ لا تنجز القوة أي عمل. وعندما تكون الزاوية α حادة، تعمل القوة على زيادة مقدار السرعة، فالعمل المنجز في هذه الحالة موجب. أما إذا عملت القوة على عرقلة الحركة، أي أن α منفرجة فالعمل المبذول سالب.

- ✓ بعد العمل: $[W] = ML^2s^{-2}$

وحدة العمل في النظام الدولي SI : $kgm^2s^{-2} = Joul$

وحدة العمل في النظام CGS : $gcm^2s^{-2} = erg$

- ✓ تكتب المعادلة (1) بدلالة الإحداثيات الديكارتية:

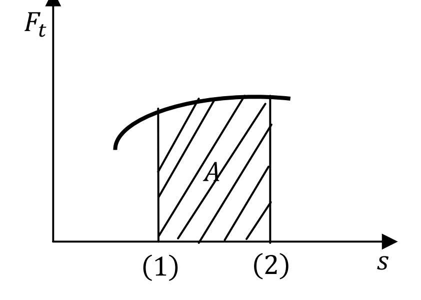
$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}, \qquad d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- ✓ فالعمل الكلي الذي تنجزه القوة $\vec{F}$ من اجل انتقال جسيم من النقطة (1) إلى النقطة (2) يعطى:

$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dW = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{r}$$

- ✓ العمل يمثل المساحة بين المركبة المماسية والانتقال كما هو موضح في الشكل:



$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F_t ds = A$$

- ✓ إذا أثرت على النقطة المادية (الجسم) مجموعة من القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، ... فإن:

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i \vec{F}_i.d\vec{r}$$

- ✓ اذا كانت القوة $\vec{F}$ المؤثرة على النقطة المادية ثابتة في الشدة والاتجاه هذا يعني هذه النقطة تتحرك على خط مستقيم:

$$F_t = F \Longrightarrow W_{12} = F\ s$$

حيث s انتقال الجسم.

- ✓ يدعى العمل الذي تنجزه القوة في وحدة الزمن بالاستطاعة (*puissance*):

$$P_{ui} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

- ✓ بعد الاستطاعة: $[P_{ui}] = \mathrm{ML^2T^{-3}}$

وحدة الاستطاعة في النظام الدولي SI : $kgm^2s^{-3} = \frac{J}{s} = Watt$.

وحدة لاستطاعة في النظام الدولي CGS: $gcm^2s^{-3} = erg/s$.

2.4 الطاقة الحركية

الطاقة الحركية (*énergie cinétique*) هي مقدرة الجسم (النقطة المادية) على إنجاز العمل بسبب حركته، أي الطاقة التي يمتلكها الجسيم بفضل حركته، فإذا كانت سرعة جسيم كتلته m تساوي $\vec{V}$ فإن طاقته الحركية تعطى ب:

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2$$

- ✓ تمتلك الطاقة الحركية نفس بعد العمل$[E_c] = [W]$، أي نفس الوحدة.
- ✓ إيجاد العلاقة بين العمل و الطاقة الحركية، في معلم غاليلي يكون :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow d\vec{r} = \vec{V}dt$$

حيث $\vec{P}$ شعاع كمية الحركة.

في حالة m ثابتة لدينا: $d\vec{P} = md\vec{V} \Longleftarrow \vec{P} = m\vec{V}$

$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{d\vec{P}}{dt}.\vec{V}dt = \int_{(1)}^{(2)} \vec{V}.d\vec{P} = \int_{\vec{V}_1}^{\vec{V}_2} m\vec{V}.d\vec{V}$$

$$= \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

$$W_{12} = E_c(2) - E_c(1) = \Delta E_c$$

تسمى العلاقة الاخيرة بنظرية الطاقة الحركية (*théorème de l'énergie cinétique*).

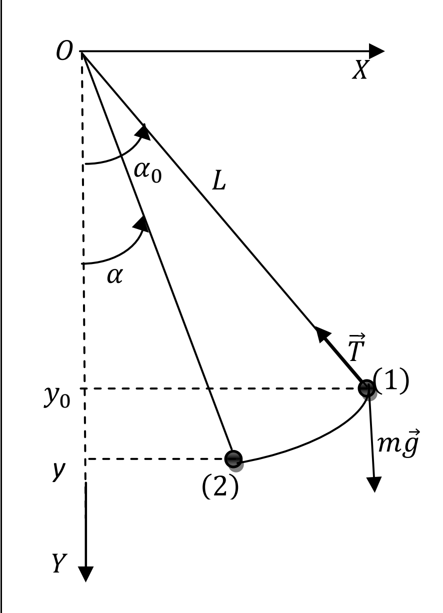
في المعلم الغاليلي، العمل الذي تقوم به القوى المؤثرة على نقطة مادية عند انتقالها بين موضعين (1) و (2) يساوي تغير طاقتها الحركية بين هذين الموضعين.

$$\boldsymbol{W_{12} = \Delta E_c = E_c(2) - E_c(1) = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2}$$

$E_c(2) > E_c(1) \Leftarrow W_{12} > 0$ القوى الخارجية هي التي تقوم بالعمل.

$E_c(2) < E_c(1) \Leftarrow W_{12} < 0$ يقوم الجسيم ذاته بعمل للتغلب على تأثير القوى (مثل عمل قوة الاحتكاك).

تمرين1:



نواس بسيط كتلته m طوله L أزيح عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية α_0. المطلوب إيجاد سرعة النواس في وضع كيفي α .

الحل:

تخضع الكتلة m الى قوة توتر الخيط $\vec{T}$ و الثقل $\vec{p} = m\vec{g}$.

قوة التوتر موجهه نحو "O" وعمودية على المسار، لذلك عملها معدوم. يبقى فقط عمل قوة الثقل:

$$\vec{F} = mg\vec{j}, \qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$
$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = mgdy$$

ومنه:

$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} mgdy = \int_{y_0}^{y} mgdy = mg(y - y_0)$$

من الشكل نجد أن: $y = L\cos\alpha$ و $y_0 = L\cos\alpha_0$

فتصبح المعادلة:

$$W = mgL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$W = E_c(2) - E_c(1) = \frac{1}{2}mV^2 = mgL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$
$$V^2 = 2gL(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Longrightarrow V = \sqrt{2gL(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

4– 3 القوى المحافظة وغير المحافظة

تقسم كافة القوى التي تصادفنا في الميكانيكا إلى نوعين: قوى محافظة (*forces conservatives*) وقوى غير محافظة (*forces non conservatives*). القوى المحافظة هي تلك القوى التي لا تتعلق إلا بموضع الجملة (إحداثيات النقطة المادية)، وعملها غير متعلق بشكل المسار. بطريقة أخرى عملها وفق مسار مغلق معدوم، مثل: قوة الثقالة وكافة القوى المركزية، تسمى القوى المحافظة بالقوى المشتقة من كمون (*dérivant d'un potentiel*) اي قوى لها طاقة كامنة. بينما باقي القوى التي لا تحقق الشروط السابقة تدعى بغير المحافظة غير مشتقة من كمون مثل: قوة الاحتكاك والمقاومة. هذه القوى تتعلق بالإضافة إلى الإحداثيات بالسرعات، وهي موجهة عكس السرعة.

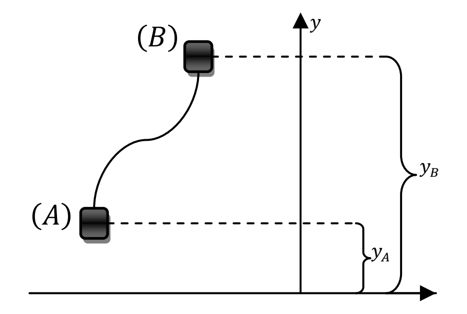
ملاحظة: لإثبات أن القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون، أي قوة محافظة هناك عدة طرق:

- نحسب عملها ونتأكد أنه لا يتعلق بالمسار، أي بتعلق فقط بنقطة البداية والنهاية.
- نحسب العمل ونتأكد أنه خلال مسار مغلق معدوم.
- يكفي أن نثبت أن دوران هذه القوة معدوم، أي: $\overrightarrow{rot}\vec{\mathrm{F}} = \vec{0}$.

4–4 الطاقة الكامنة

لنفرض أننا رفعنا جسما كتلته m من الموضع(B) ارتفاعها y_A إلى نقطة (B) ارتفاعها y_B، فالعمل المنجز:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -mg(y_B - y_A)$$



فإذا بقي الجسم ساكنا عند (B) عندئذ يطرح السؤال أين ذهب هذا العمل الذي قمنا به؟ وهل يملك الجسم أية طاقة عند (B)؟ من جهة ثانية لو أفلتناه عند (B) لتحرك نحو الأسفل واكتسب طاقة حركية متزايدة.

من الواضح أن الجسم عند (B) لا يملك طاقة حركية لأنه ساكن. فنقول أن العمل قد تحول إلى طاقة أعطيت إلى الجسم، و لكن ليست طاقة حركية، بل تدعى بالطاقة الكامنة (*énergie potentielle*) E_p لأنها تبقى كامنة في الجسم حتى يتحرك.

الطاقة الكامنة للقوة المشتقة من كمون هي الطاقة التي يكتسبها الجسم بسبب وضعه. من خلال ما سبق يمكن القول أن الجسم حول الطاقة الكامنة التي اكتسبها إلى شكل معاكس ومساو وهي الطاقة الحركية:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

و منه يمكن أن نكتب:

$$dW = dE_c$$
$$dW = -dE_p$$

لا يمكن تحديد الطاقة الكامنة لكافة قوى التأثير، وعليه لا يمكن إدخال مفهوم هذه الطاقة إلا من أجل القوى المحافظة. وبالعكس، عند وجود قوى غير محافظة مثلا قوة الاحتكاك، فإن هذه القوى لا تملك قيما غير محددة للطاقة الكامنة.

القوة المحافظة $\vec{F}$ التي لا يتعلق عملها بالمسار المتبع للانتقال من الموضع (1) الى الموضع (2)، فالطاقة الكامنة الناتجة متعلقة فقط بالموضع، وتعطى بـ:

$$\Delta \boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_p}(\mathbf{2}) - \boldsymbol{E_p}(\mathbf{1}) = -\boldsymbol{W_{12}}(\vec{\boldsymbol{F}}) = -\Delta \boldsymbol{E_c}$$

تبقى القيمة المطلقة متعلقة باختيار بداية قياس الطاقة الكامنة، أي باختيار ذلك الموضع التي نعتبر فيها الطاقة الكامنة مساوية للصفر.

إيجاد العلاقة بين الطاقة الكامنة والقوة المشتقة منها:

توصف تفاعل الأجسام بواسطة الطاقة الكامنة كتابع للإحداثيات الجسيمات المتفاعلة، لذلك تمكننا معرفة القوى (توابع الإحداثيات) من إيجاد الطاقة الكامنة، والعكس أيضا، في الإحداثيات الديكارتية لدينا:

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$
$$dW = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

من جهة أخرى لدينا:

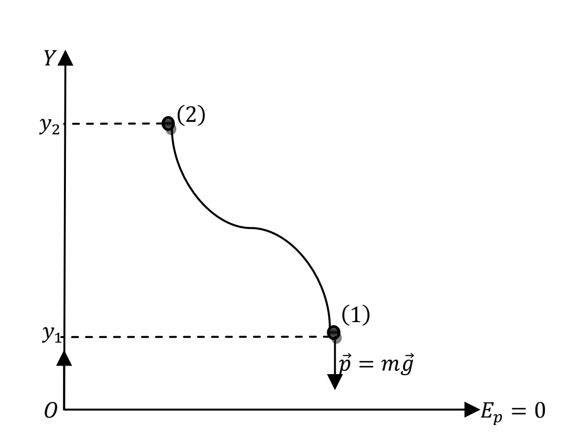
$$-dE_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial y}dz$$

بالمقارنة نجد:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{k} = -\vec{\nabla}E_p$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

5.4 الطاقة الكامنة الثقالية و عمل قوى الثقل



نرفع النقطة المادية ذات الكتلة m من الموضع (1) ذي الارتفاع y_1 إلى الموضع (2) ذي ارتفاع y_2 تحت تأثير قوة الثقل : $\vec{p} = -mg\vec{\jmath}$. نأخذ المحور OY موجها وفق الشاقول نحو الأعلى (أنظر الشكل):

$$W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{p}.d\vec{r} = -\int_{(1)}^{(2)} mgdy = -mg(y_2 - y_1)$$

نلاحظ أن عمل قوة الثقل (*travail du poids*) لا يتعلق بالمسار، بل يتعلق فقط بنقطة البداية والنهاية، أي أن قوة الثقل محافظة.

$$W_{12} = -\Delta E_p = E_p(1) - E_p(2) = mgy_1 - mgy_2$$

حيث:

$$E_p(1) = mgy_1 + c$$
$$E_p(2) = mgy_2 + c$$

يمكننا إيجاد الطاقة الكامنة لقوة الثقل (*énergie potentielle de pesanteur*) بطريقة ثانية:

$$\vec{p} = -\vec{\nabla}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{k}$$

$$-mg = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Longrightarrow E_p(y) = mgy + c$$

بداية قياس الطاقة الكامنة اختياري، وليكن $E_p(y = 0) = 0$:

$$c = 0 \Longleftarrow E_p(y = 0) = 0$$

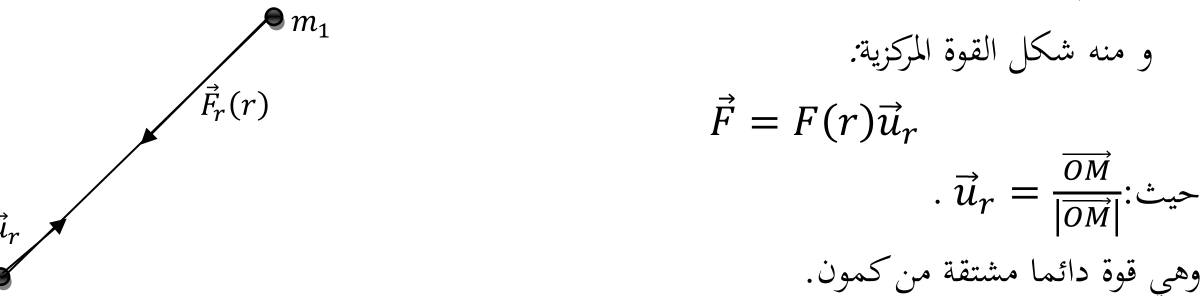
$$E_p(y) = mgy$$

إشارة$E_p(y)$ حسب إشارة y.

6.4 الطاقة الكامنة لقوة مركزية

نقول عن القوة $\vec{F}(M,t)$ أنها قوة مركزية (*force centralisé*) إذا حققت الشروط التالية:

- ✓ غير متعلقة بالزمن أي: $\vec{F}(M,t) = \vec{F}(M)$.
- ✓ متجهة نحو أو من مركز القوة 'O' أي: $\vec{F}(M) = F(M)\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$. تدعى الأولى بالقوة الجاذبة المركزية والثانية بالقوة الطاردة المركزية.
- ✓ في الإحداثيات الكروية نجد أن $F(M) = F(r,\theta,\varphi)$ لا تتعلق إلا بالمسافة $r = OM$ أي:$F(M) = F(r)$.



و منه شكل القوة المركزية:

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$$

حيث:$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$.

وهي قوة دائما مشتقة من كمون.

نأخذ مثال: حساب الطاقة الكامنة لتفاعل الجاذبية بين كتلتين.

تعطى قوة الجاذبية الكتلية في الحالة عندما تكون المسافة كبيرة بين المتجاذبين m_1 و m_2:

$$\vec{F}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r \Longrightarrow -\frac{Gm_1m_2}{r^2} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

بالمكاملة:

$$E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + c$$

نختار $E_p(r=\infty)=0 \Longleftarrow c=0$ فيكون:

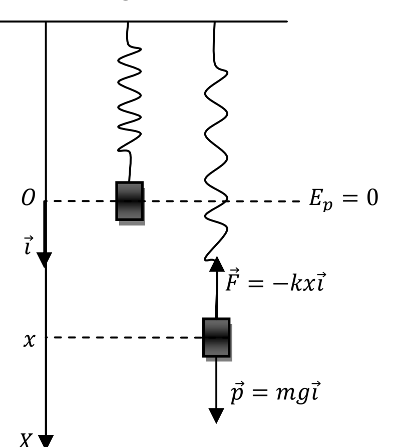
$$E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

7.4 الطاقة الكامنة لقوة المرونة

قوة المرونة هي قوة مشتقة من كمون نستطيع ان نتأكد من ذلك باستعمال:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

عند وضع كتلة m في نابض فإنه يستطيل بفعل الثقل $\vec{p}=mg\vec{\imath}$ (ox موجه نحو الأسفل)، الى أن يتم التوازن بين قوة المرونة و الثقل. نزيح الكتلة مسافة x عن وضع التوازن فتظهر قوة مرونة $\vec{F}=-kx\vec{\imath}$ (حسب قانون هوك و k ثابت المرونة) تحاول إرجاع الكتلة إلى وضع توازنها :



$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

$$-kx\vec{\imath} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{k} \Longrightarrow -kx = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

بالمكاملة نجد:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

باختيار $E_p(x=0)=0 \Longleftarrow c=0$ فيكون:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

تمرين 1:

تمتلك نقطة مادية كتلتها m في حقل قوى محافظة طاقة كامنة: $E_p = 2x^2 - xy + yz$

- ما هي القوة $\vec{F}$ التي تؤثر على هذه النقطة المادية؟

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} = -4x + y \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} = x - z \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} = -y \end{cases}$$

$$\vec{F} = (-4x + y)\vec{i} + (x - z\,)\vec{j} - y\vec{j}$$

- أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عند الانتقال من النقطة $A(1,2,-1)$ إلى النقطة $B(2,4,-2)$ عبر المسالك التالية:

1-المستقيم AB.

2-الخط المنكسر: $A(1,2,-1) \longleftarrow C(2,2,-1) \longleftarrow D(2,4,-1) \longleftarrow B(2,4,-2)$

لدينا:

$$\begin{aligned} dW &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= (-4x + y)dx + (x - z\,)dy - ydz \qquad (1) \end{aligned}$$

1-حساب العمل تبعا للمسلك المستقيم:

إيجاد معادلة المستقيم المشكل من النقطتين A و B. لتكن $M(x, y, z)$ نفطة من هذا المستقيم فيكون:

$$\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 2x \end{cases}$$

نعوض قيمة y و z في المعادلة (1) فنجد:

$$W_{AB} = \int_{x=1}^{x=2} 4x dx = 6 \text{ وحدة دولية}$$

2-حساب العمل عبر المسلك المنكسر:

$$W_{AB} = W_{AC} + W_{CD} + W_{DB}$$

خلال المسار $A(1,2,-1) \longleftarrow C(2,2,-1)$ نجد ان : $y = 2 \Rightarrow dy = 0$ و $z = -1 \Rightarrow dz = 0$ ، يعني:

$$W_{AC} = \int_{x=1}^{x=2} (-4x+2)dx = -4$$ وحدة دولية

خلال المسار $C \longleftarrow D$ نجد ان : $x = 2 \Rightarrow dx = 0$ و $z = -1 \Rightarrow dz = 0$ ،

يعني:

$$W_{CD} = \int_{y=2}^{y=4} 3dy = 6$$ وحدة دولية

خلال المسار $D \longleftarrow B$ نجد ان : $x = 2 \Rightarrow dx = 0$ و $y = 4 \Rightarrow dy = 0$ ،

يعني:

$$W_{CD} = \int_{z=-1}^{z=-2} -4dz = 4$$ وحدة دولية

و منه:

$$W_{AB} = -4 + 6 + 4 = 6$$ وحدة دولية

والنتيجة كانت متوقعة لأن القوة مشتقة من كمون.

تمرين 2:

لتكن نقطة مادية تخضع إلى القوة التالية:

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$$

بين أن هذه القوة مشتقة من كمون ، واحسب طاقتها الكامنة ؟.

لدينا:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy + z^3) & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

ومنه القوة مشتقة من كمون.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} = (2xy + z^3) & (1) \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} = x^2 & (2) \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} = 3xz^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow \partial E_P = -(2xy + z^3)\partial x \;\Longrightarrow$$

$$E_P = -x^2y - z^3x \;+ f_1(y,z) \qquad (4)$$

نشتق قيمة الطاقة الكامنة(4) بالنسبة للمتغير y ونعوضها في المعادلة (2) فنجد:

$$F_y = x^2 = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = x^2 - \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = 0 \Longrightarrow f_1(y,z) = f_2(z)$$

ومنه:

$$E_P = -x^2y - z^3x \;+ f_2(z) \qquad (5)$$

نشتق قيمة الطاقة الكامنة(5) بالنسبة للمتغير z ونعوضها في (3) فنجد:

$$F_z = 3xz^2 = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = 3xz^3 - \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \Longrightarrow \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = 0 \Longrightarrow f_2(z) = c = \text{ثابت}$$

ومنه:

$$E_P = -x^2y - z^3x \;+ c$$

8.4 قانون إنحفاظ وتغير الطاقة

في حالة القوى المحافظة:

عندما تتحرك نقطة مادية كتلتها m بفعل قوى مشتقة من كمون فإن كلا من طاقتها الحركية والكامنة تتغير من أجل نفس الانتقال:

$$dW = dE_c$$
$$dW = -dE_p$$

بطرح المعادلتين نحصل:

$$dE_c + dE_p = d(E_c + E_p) = 0$$
$$\Longrightarrow E_c + E_p = E_M = \text{ثابت} \qquad (1)$$

E_M هو مجموع الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة، ويدعى الطاقة الميكانيكية (الطاقة الكلية) للنقطة المادية والعلاقة (1) هي التعبير الرياضي عن قانون إنحفاظ الطاقة في الميكانيك.

يعني:

التغير في الطاقة الميكانيكية الكلية لنقطة مادية تؤثر عليها قوى محافظة عند الانتقال من النقطة (1) إلى النقطة (2) يساوي الصفر،أي:

$$\Delta \mathbf{E_M} = \boldsymbol{E_M(2) - E_M(1) = 0}$$

- ✓ ثبات E_M لا يعني ثبات E_c و E_p كل ما يحدث هو تحول من حالة إلى حالة وهي احد قوانين الطبيعة.
- ✓ في بعد واحد تصبح المعادلة (1):

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_P(x) = E_M$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة للزمن:

$$m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dE_P(x)}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dE_P(x)}{dx} = \dot{x}(m\ddot{x} - F_x) = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} = F_x$$

قانون إنحفاظ الطاقة الكلية هو وجه أخر لقانون نيوتن الثاني.

في حالة القوى غير المحافظة:

في حالة ظهور قوى غير محافظة يكون العمل الكلي W هو مجموع عمل القوى المحافظة W^c وعمل القوى غير المحافظة، او كما تسمى قوى التبديد W^d حيث:

$$W = W^c + W^d \qquad (2)$$

حيث:

$$W = \Delta E_C = E_c(2) - E_c(1)$$
$$W^c = -\Delta E_P = E_P(1) - E_P(2)$$

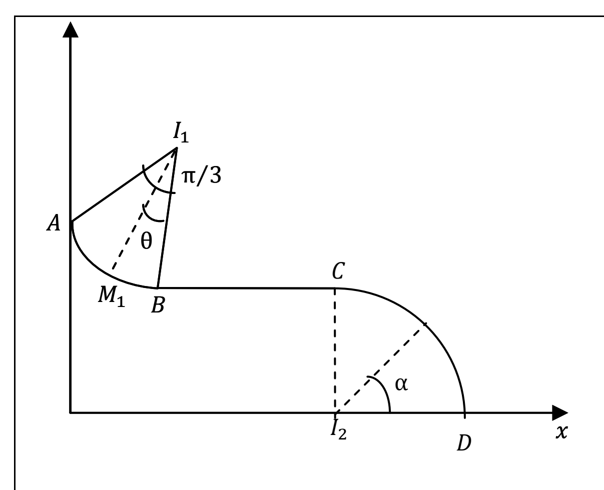
بتعويض المعادلتين في المعادلة (2) نحصل على:

$$E_c(2) - E_c(1) = E_P(1) - E_P(2) + W^d$$
$$\Longrightarrow [E_c(2) + E_P(2)] - [E_c(1) + E_P(1)] = W^d$$
$$\Longrightarrow E_M(2) - E_M(1) = \Delta E_M = W^d$$

في حالة وجود قوى غير المحافظة لا تكون الطاقة الميكانيكية ثابتة، وتغيرها يساوي عمل هذه القوى غير المحافظة:

$$\boldsymbol{\Delta E_M = E_M(2) - E_M(1) = W^d}$$

تمرين3:



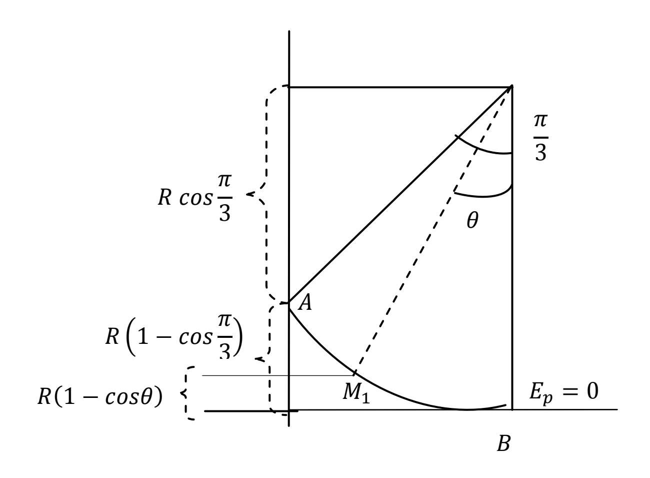
تتحرك نقطة مادية M كتلتها m على مسار يتكون من ثلاثة أجزاء AB ، BC و CD. حيث AB عبارة عن سدس دائرة شاقوليه نصف قطرها R ومركزها I_1. BC جزء مستقيم أفقي طوله R و CD ربع دائرة شاقوليه نصف قطرها R و مركزها I_2.

تتحرك النقطة بدون احتكاك من A إلى B و من C إلى D و باحتكاك (معامل الاحتكاك k) من B إلى C.

1. أحسب الطاقة الحركية في نقطة M_1 من AB. استنتج أن: $V_B^2 = V_0^2 + gR$ حيث V_0^2 تمثل السرعة عند النقطة A.
2. أحسب عمل قوة الاحتكاك بين النقطة B و النقطة M_2 كيفية من BC. استنتج السرعة عند C.
3. بين أن رد الفعل في نقطة M_3 من CD هو: $N = mg(3\sin\alpha - 2) - \frac{mV_C^2}{R}$. ما قيمة α التي من أجلها ينعدم رد الفعل N؟ ماذا يحدث إذن؟

الحل:

1. نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين النقطتين A وM_1 مرجع الطاقة الكامنة الثقالية هو عند B:

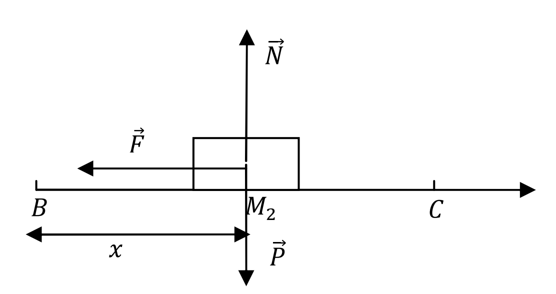


$$E_M(A) = E_M(M_1)$$
$$E_c(A)+E_p(A) = E_c(M_1)+E_p(M_1)$$
$$\frac{1}{2}mV_0^2 + mgR\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = E_c(M_1) + mgR(1-\cos\theta)$$
$$E_c(M_1) = \frac{1}{2}mV_{M_1}^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgR\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

عند النقطة B نكتب المعادلة السابقة:

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgR\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{mgR}{2}$$
$$\Longrightarrow V_B^2 = V_0^2 + gR$$

2. يكتب العمل العنصري:



$$dW = \left(\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}\right).d\vec{r}$$
$$= -Fdx$$

العمل قوة الاحتكاك بين النقطتين B وM_2:

$$F = T = kN = kmg$$
$$W_{B\to M_2} = -Fx = -kmgx$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين النقطتين B و C:

$$W_{B\to C} = E_c(C) - E_c(B)$$
$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -kmgR \Longrightarrow V_C^2 - V_B^2 = -2kgR$$

نعوض بقيمة V_B^2 نجد:

$$V_C^2 = V_B^2 + gR(1-2k)$$

3.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك وبإسقاطه على المحور الناظمي نجد:

$$mg\sin\alpha - N = m\frac{V_{M_3}^2}{R} \Longrightarrow N = mg\sin\alpha - m\frac{V_{M_3}^2}{R}$$

نحسب $V_{M_3}^2$ باستعمال مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية C و M_3 حيث مرجع الطاقة الكامنة هو المحور I_2D:

$$E_M(C) = E_M(M_3)$$

$$\frac{1}{2}mV_C^2 + mgR = \frac{1}{2}mV_{M_3}^2 + mgR\sin\alpha$$

$$V_{M_3}^2 = V_C^2 + 2gR(1-\sin\alpha)$$

وبتعويض قيمتها نجد:

$$N = mg(3\sin\alpha - 2) - \frac{mV_C^2}{R}$$

إيجاد قيمة α التى ينعدم من اجلها رد الفعل:

$$N = 0 \Longrightarrow g(3\sin\alpha - 2) = \frac{V_C^2}{R} \Longrightarrow \alpha = arc\sin\left(\frac{V_C^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right)$$

عند هذه الزاوية يغادر الجسم ربع الدائرة.

الملحق الاول

L’alphabet grec الأبجدية الإغريقية

Nom الاسم	*Majuscule* الحرف الكبير	*Minuscule* الحرف الصغير
Alpha	A	α
Bêta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε, ϵ
Zêta	Z	ζ
Iota	I	ι
Êta	H	η
Thêta	Θ	θ, ϑ
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ
Nu	N	ν
Ksi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Rho	R	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Υ	υ
Phi	Φ	φ, ϕ
Xi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Oméga	Ω	ω

الملحق الثاني

تغيير إحداثيات نقطة بتغيير الجملة

لتكن $OXYZ$ و $OX'Y'Z'$ جملتي إحداثيات لهما أشعة الوحدة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ و $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ على التوالي، لتكن M نقطة إحداثياتها (x,y,z) و (x',y',z') في المعلمين $OXYZ$ و $OX'Y'Z'$ على التوالي، سنحاول إيجاد إحداثيات النقطة M في أحد المعالم بدلالة إحداثياتها في المعلم الآخر.

نفترض أن:

جيوب تمام توجيه شعاع الوحدة $\vec{\imath}'$ في المعلم $OXYZ$ هي: $\cos\gamma_1$ ، $\cos\beta_1$ ، $\cos\alpha_1$.

جيوب تمام توجيه شعاع الوحدة $\vec{\jmath}'$ في المعلم $OXYZ$ هي: $\cos\alpha_2 , \cos\beta_2 , \cos\gamma_2$.

جيوب تمام توجيه شعاع الوحدة $\vec{k}'$ في المعلم $OXYZ$ هي: $\cos\gamma_3$ ، $\cos\beta_3$ ، $\cos\alpha_3$.

بما أشعة الوحدة طويلتها تساوي الواحد فتكتب بالطريقة التالية:

$$\vec{\imath}' = \cos\alpha_1\,\vec{\imath} + \cos\beta_1\,\vec{\jmath} + \cos\gamma_1\,\vec{k}$$
$$\vec{\jmath}' = \cos\alpha_2\,\vec{\imath} + \cos\beta_2\,\vec{\jmath} + \cos\gamma_2\,\vec{k}$$
$$\vec{k}' = \cos\alpha_3\,\vec{\imath} + \cos\beta_3\,\vec{\jmath} + \cos\gamma_3\,\vec{k}$$

و شعاع $\overrightarrow{OM}$ يعطى في المعلمين كما يلي:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}' \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\vec{\imath} \\ &+ (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\vec{\jmath} \\ &+ (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\vec{k}\end{aligned}$$

بالمقارنة نجد:

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$

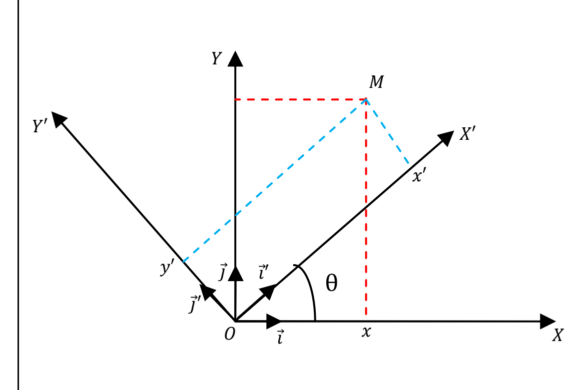
يمكن تمثيلها:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}}_{\text{مصفوفة التحويل}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

تمرين 1:

دوران الجملة $OX'Y'$ بزاوية θ بالنسبة لـ OXY، حول المحور OZ.

من خلال الشكل نجد:



$$(\widehat{\vec{i'},\vec{i}}) = \theta, (\widehat{\vec{i'},\vec{j}}) = \frac{\pi}{2} - \theta,$$
$$(\widehat{\vec{i'},\vec{k}}) = \frac{\pi}{2}$$
$$(\widehat{\vec{j'},\vec{i}}) = \frac{\pi}{2} + \theta, (\widehat{\vec{j'},\vec{j}}) = \theta,$$
$$(\widehat{\vec{j'},\vec{k}}) = \frac{\pi}{2}$$
$$(\widehat{\vec{k'},\vec{i}}) = \frac{\pi}{2}, (\widehat{\vec{k'},\vec{j}}) = \frac{\pi}{2}, (\vec{k'},\vec{k}) = 0$$

بتعويض هذه العلاقات في مصفوفة التحويل السابقة نجد:

$$x = x'\cos\theta + y'\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$$
$$y = x'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + y'\cos\theta$$
$$\Rightarrow$$
$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad (1)$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad (2)$$

لإيجاد العلاقة العكسية:

$$\cos\theta \times (1) + \sin\theta \times (2) \Longrightarrow x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$\cos\theta \times (2) - \sin\theta \times (1) \Longrightarrow y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

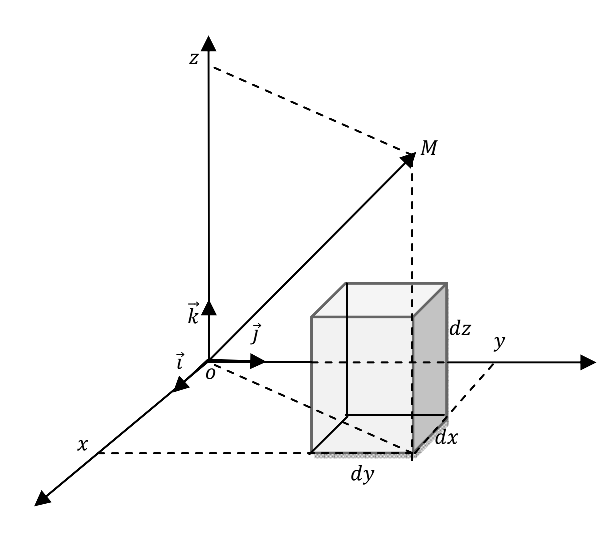
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

الملحق الثالث

السطوح والحجم في مختلف الإحداثيات

الإحداثيات الديكارتية (**coordonnées cartésiennes**)

يعطى شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية كما يلي:



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz$$

$$= dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{\imath}} = dydz$$

$$dS_{\perp\vec{\jmath}} = dxdz$$

$$dS_{\perp\vec{k}} = dydx$$

عنصر الحجم : $dV = dxdydz$.

ليكن $\phi(x,y,z)$ دالة سلمية و $\vec{A}$ دالة شعاعيه حيث: $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$

التدرج (**Gradient**):

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

التفرق (**Divergence**):

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

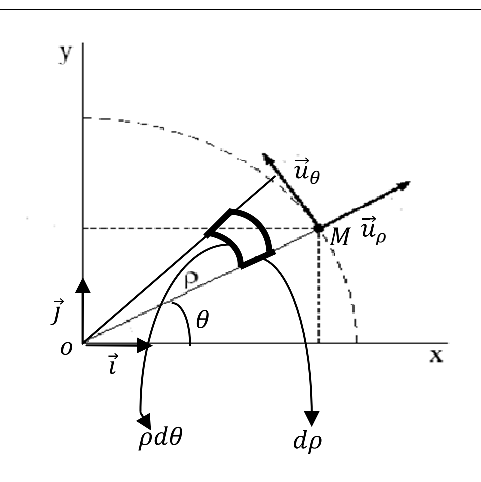
الدوران (**Rotationnel**) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{A_z}{\partial} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

لابلاسيان (**Laplacien**):

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

الإحداثيات القطبية (*coordonnées polaires*)

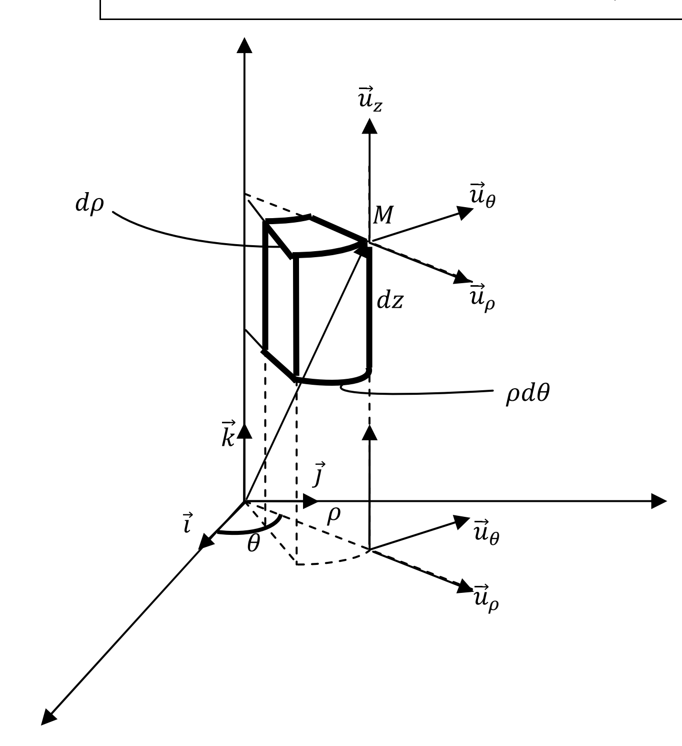


$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$$

عنصر السطح : $dS = \rho d\rho d\theta$

الإحداثيات الاسطوانية (*coordonnées cylindriques*)



$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz$$

$$= d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{u}_\rho} = \rho d\theta dz$$

$$dS_{\perp\vec{u}_\theta} = d\rho dz$$

$$dS_{\perp\vec{u}_z} = \rho d\rho d\theta$$

عنصر الحجم :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

ليكن $\varphi(\rho,\theta,z)$ دالة سلمية و$\vec{A}$ دالة شعاعيه $\vec{A} = A_\rho\vec{u}_\rho + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$:

التدرج (***Gradient***):

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{u}_z$$

التفرق (***Divergence***):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

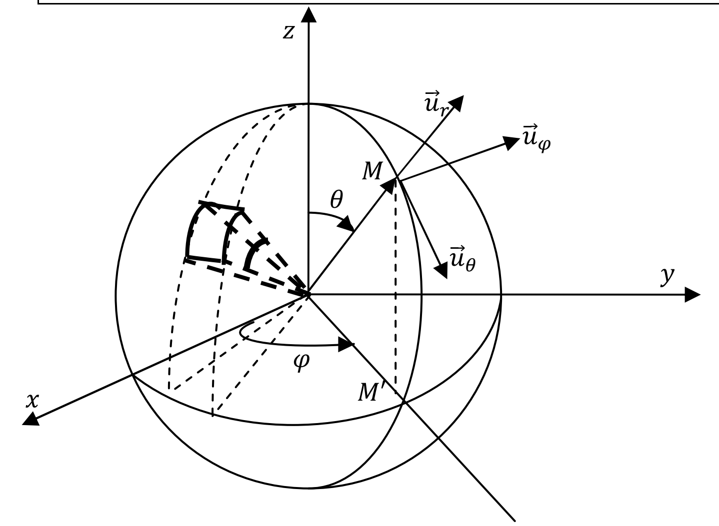
الدوران (***Rotationnel***):

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z$$

لابلاسيان (***Laplacien***):

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

الإحداثيات الكروية (*coordonnées sphériques*)



$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi$$

$$= dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{u}_\varphi$$

عناصر السطح :

$$dS_{\perp\vec{u}_r} = r^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dS_{\perp\vec{u}_\theta} = rsin\theta drd\varphi$$

$$dS_{\perp\vec{u}_\varphi} = rdrd\theta$$

عنصر الحجم :

$$dV = r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$$

ليكن $\varphi(r,\theta,\varphi)$ دالة سلمية و$\vec{A}$ دالة شعاعيه $\vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi$:

التدرج (***Gradient***):

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

التفرق (***Divergence***):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(A_\theta sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

الدوران (***Rotationnel***):

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

لابلاسيان (***Laplacien***):

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

الملحق الرابع

حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية و الأولى

1- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بمعاملات ثابتة، بدون طرف ثان

لتكن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية (*équation différentielle du second ordre*):

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+c\,x(t)=0 \qquad (1)$$

حيث: a، b و c أعداد حقيقية غير معدومة.

لحل المعادلة السابقة أي إيجاد $x(t)$، نرفق المعادلة التفاضلية بمعادلة مميزة (*équation caractéristique*):

$$ar^2+br+c=0$$

نحسب المميز (*discriminant*):

$$\Delta=b^2-4ac$$

نلحظ ثلاث حالات:

←$\Delta>0$، المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين (*deux racines réelles*):

$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ و $r_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، حل المعادلة التفاضلية (1) يعطى:

$$x(t)=Aexp(r_1t)+Bexp(r_2t)$$

يبقى تعيين A و B بدلالة الشروط الابتدائية مثلا:

$$x(0)=\quad,\quad\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}=\quad,\dots$$

←$\Delta=0$، المعادلة المميزة تقبل حلا مضاعفا حقيقيا (*racine double réelle*): $r=\frac{-b}{2a}$

و يكون حل المعادلة التفاضلية:

$$x(t)=(At+B)exp(rt)$$

يبقى تعيين A و B بدلالة الشروط الابتدائية.

$\Delta < 0 \leftarrow$، المعادلة المميزة تقبل حلين مركبين مترافقين (*deux racines complexes conjuguées*):

$$r_2 = \alpha - i\beta = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ و } r_1 = \alpha + i\beta = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

و يكون حل المعادلة التفاضلية:

$$x(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$$

يبقى تعيين A و B بدلالة الشروط الابتدائية.

ملاحظة: في حالة $b = 0$ تصبح المعادلة التفاضلية (1)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2\, x(t) = 0$$

بوضع : $\omega^2 = \frac{c}{a}$، حل هذه المعادلة يأخذ الشكل التالي:

$$x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)$$

يبقى تعيين A و B بدلالة الشروط الابتدائية.

2- الحالة مع الطرف الثاني (*cas avec second membre*)

نكتب المعادلة التفاضلية (1) مع طرف ثاني من الشكل التالي:

$$\frac{d^2x(t)}{dt} + 2\xi\omega_0\frac{dx(t)}{dt} + {\omega_0}^2 x(t) = f(t) \qquad (2)$$

الحل العام لهذه لمعادلة (*solution générale de l'équation complète*) **SGEC** يساوي مجموع الحل العام للمعادلة من دون طرف (*solution générale de l'équation sans second membre associé*) **SGESSMA** و الحل الخاص للمعادلة مع الطرف الثاني (*solution particulière de l'équation complète*) **SPEC**:

$$\boldsymbol{SGEC = SGESSMA + SPEC}$$

✓ إذا كانت $f(t) = constante$ فنبحث عن $x(t) = constante$ كحل خاص للمعادلة (2) **SPEC**.

✓ إذا كانت $f(t) = U_0.\cos(\omega t)$ نبحث عن الحل الخاص للمعادلة الكلية (2) (**SPEC**) من الشكل التالي:

$$x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t) \qquad (3)$$

لإيجاد A وB، نشتق الحل الخاص (2) مرة ومرتين:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \qquad (4)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) \qquad (5)$$

نعوض في المعادلة (2) بقيم$x(t)$ ومشتقاتها (3) ، (4) و (5) فنحصل على:

$$A = \frac{({\omega_0}^2 - \omega^2)}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\xi\omega_0.\omega)^2} U_0$$

$$B = \frac{2.\xi\omega_0.\omega}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\xi\omega_0.\omega)^2} U_0$$

3- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة، بدون طرف ثان:

المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى (*équation différentielle du premier ordre*) بدون طرف ثان المعادلة من الشكل:

$$a.\frac{dx(t)}{dt} + b.x(t) = 0$$

حيث: $a, b \in R$: لدينا أن :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{a}x(t) \Rightarrow \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int -\frac{b}{a}dt$$

$$\Rightarrow \ln x(t) = -\frac{b}{a}t \ln c \Rightarrow x(t) = c\, e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)}$$

و منه حل المعادلة التفاضلية هو:

$$x(t) = c\, e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)}$$

حيث: $c \in R$.

4- حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة، بطرف ثان.

المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بطرف ثان التالية:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t) = f(t) \qquad (6)$$

الحل العام للمعادلة لهذه المعادلة **SGEC** (*solution générale de l'équation complète*) يساوي مجموع الحل العام للمعادلة من دون طرف (*solution générale de l'équation sans second membre associé*) **SGESSMA** و حل الخاص للمعادلة الكلية (*solution particulière de l'équation complète*): **SPEC**

$$\boldsymbol{SGEC = SGESSMA + SPEC}$$

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة نفرض أنه يكتب من الشكل:

$$x(t) = c(t)\, e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} \qquad (7)$$

ونبحث عن المعامل $c(t)$ عن طريق تعويض الحل الخاص (2) في المعادلة (1):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{a}c(t)e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} + \frac{dc(t)}{dt}e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)}$$

$$-\frac{b}{a}c(t)e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} + \frac{dc(t)}{dt}e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} + \frac{b}{a}c(t)e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} = f(t)$$

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)} = f(t) \Longrightarrow \frac{dc(t)}{dt} = f(t)e^{\left(\frac{b}{a}t\right)} \Longrightarrow$$

$$c(t) = \int f(t)e^{\left(\frac{b}{a}t\right)}\, dt$$

ومنه الحل:

$$x(t) = e^{\left(-\frac{b}{a}t\right)}\left(c + \int f(t)\, e^{\left(\frac{b}{a}t\right)}dt\right) \qquad (8)$$

5– حل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بمعاملات متغيرة، بطرف ثان

المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى بمعاملات غير ثابتة بطرف ثان:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{b(t)}{a(t)}x(t) = f(t) \qquad (9)$$

الحل العام للمعادلة بدون طرف هو: $x(t) = c\, e^{\left(-\int\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)}$

الحل العام للمعادلة بطرف ثان:

$$x(t) = e^{\left(-\int\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)}\left[c + \int f(t)e^{\left(\int\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)}dt\right] \qquad (10)$$

تعيين الثابت c باستعمال الشروط الابتدائية.

الملحق الخامس

التحريك في المعلم غير العطالي

كما رأينا سابقا تعتمد قوانين نيوتن الثلاثة للنقطة المادية على مبدأ العطالة، الذي يفترض وجود معالم عطالية، حيث تتحرك أية نقطة مادية معزولة بحركة مستقيمة منتظمة أو ساكنة. سوف نتعرف كيف يمكن تحويل قوانين نيوتن في المعلم غير العطالي .

لنفرض معلم غير العطالي $R'(O',\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ في حركة كيفية بالنسبة إلى معلم عطالي $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في المعلم العطالي R :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}_a$$

$\vec{F}$ ترمز لمجموع القوى المؤثرة على الكتلة m. بالاعتماد على قانون تركيب التسارعات المذكور في الفصل الثاني نجد:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$
$$\vec{F} = m\vec{\gamma}_a = m(\vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c)$$

بإدخال قوتي العطالة :

قوة العطالة لكروليوس (*force d'inertie de Coriolis*): $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$

قوة العطالة المكتسبة (*force d'inertie d'entrainement*): $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$

ومنه المبدأ الاساسي في المعلم الغير عطالي اي النسبي:

$$m\vec{\gamma}_r = \vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_e$$

حيث $\vec{\gamma}_c$ و $\vec{\gamma}_e$ محسوبة بالنسبة إلى المعلم العطالي.

الملحق السادس

اجزاء ومضاعفات وحدات النظام الدولي للقياس

يوضح الجدول البدايات التي يمكن اضافتها قبل الوحدات النظام الدولي:

البداية Préfix	الرمز symbole	معامل الضرب Facteur	البداية Préfix	الرمز symbole	معامل الضرب Facteur
يوكتو — $yocto$	y	10^{-24}	يوتا — $yotto$	Y	10^{24}
زيبتو — $zeto$	z	10^{-21}	زيتا — $zetta$	Z	10^{21}
أتو — $atto$	a	10^{-18}	إكزا — exa	E	10^{18}
فيمتو — $femto$	f	10^{-15}	بيتا — $peta$	P	10^{15}
بيكو — $pico$	p	10^{-12}	تيرا — $tera$	T	10^{12}
نانو — $nano$	n	10^{-9}	جيغا — $giga$	G	10^{9}
مايكرو — $micro$	μ	10^{-6}	ميغا — $mega$	M	10^{6}
ملي — $milli$	m	10^{-3}	كيلو — $kilo$	k	10^{3}
سنتي — $centi$	c	10^{-2}	هكتو — $hecto$	h	10^{2}
ديسي — $deci$	d	10^{-1}	ديكا — $deka$	da	10^{1}

المراجع

- صورية مباركي، زين الدين امام، عبد القادر بومعزة: مدخل في الميكانيك، ديوان المطبوعات الجامعية.
- ح. كوبارار، ج. خوربي، ف.ز. خلادي، ح. جلواح: مدخل في الميكانيك، ديوان المطبوعات الجامعية.
- د.عبد الله موسى: الميكانيك العام، الجزء الاول، ديوان المطبوعات الجامعية.
- عبد القادر عماري، محمد الصالح فراح، محمد الطيب مفتاح، رشيد العلمي: مسائل محلولة في ميكانيك النقطة المادية، ديوان المطبوعات الجامعية.
- ع.قرزيز، س.غميض، ح. مراجي: مسائل محلولة في الفيزياء- ميكانيك، الجزء الاول والثاني، مطبوعات جامعة باجي مختار-عنابة.